天一大联考
2022—2023 学年高二年级阶段性测试(二)
数学・答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. **答案** C

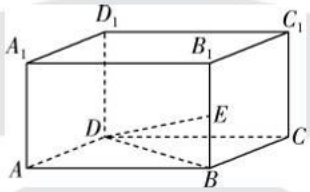
命题意图 本题考查直线的垂直关系.

解析 由两直线垂直,可知 $3\times2+(-6\lambda)\times(-4)=0$,解得 $\lambda=-\frac{1}{4}$.

2. **答案** D

命题意图 本题考查空间向量的线性运算.

解析 如图所示,$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\therefore\ \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



3. **答案** A

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 设$\{a_n\}$的公差为 d,则$\begin{cases}a_1=-7,\\a_3+a_8=2a_1+9d=4,\end{cases}$解得 $d=2$,$\therefore\ a_n=2n-9$,$\therefore$ 当 $1\leqslant n\leqslant4$ 时,$a_n<0$,当 $n\geqslant5$ 时,$a_n>0$,$\therefore\ S_n$ 的最小值为 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=-7-5-3-1=-16$.

4. **答案** B

命题意图 本题考查抛物线的基本性质.

解析 设 $P(x_0,y_0)$,根据抛物线定义可知$\frac{7}{2}=|PF|=x_0+\frac{p}{2}=x_0+\frac{3}{2}$,$\therefore\ x_0=2$,$\therefore\ y_0^2=12$,$y_0=2\sqrt{3}$,故 $P(2,2\sqrt{3})$.

5. **答案** C

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 $\because$ 圆 $C:x^2+y^2=16$ 的圆心为 $C(0,0)$,半径为 4,$\therefore$ 圆心 C 到直线 l 的距离为$\frac{2}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=2$,$\therefore\ |AB|=2\sqrt{16-4}=4\sqrt{3}$.

6. **答案** B

命题意图 本题考查点到直线的距离.

解析 $\because$ 点$(3,4)$在直线 $ax+by-10=0$ 上,$\therefore\ 3a+4b-10=0$,点(a,b)在直线 $3x+4y-10=0$ 上,其到原点的距离的最小值,即原点到直线 $3x+4y-10=0$ 的距离,为$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

7. **答案** A

命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 由题意知 $A(-\sqrt{6},0)$,$B(\sqrt{6},0)$. 设 $P(x_0,y_0)$,则 $k_1=\frac{y_0}{x_0+\sqrt{6}}$,$k_2=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{6}}$,$\because P$ 为椭圆 C 上一点,$\therefore \frac{x_0^2}{6}-1=-\frac{y_0^2}{4}$,即 $-\frac{4}{6}=\frac{y_0^2}{x_0^2-6}$,$\therefore \frac{y_0}{x_0+\sqrt{6}}\cdot\frac{y_0}{x_0-\sqrt{6}}=-\frac{2}{3}$,即 $k_1\cdot k_2=-\frac{2}{3}$.

8. **答案** B

命题意图 本题考查空间向量的应用.

解析 以 C 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$. 由 $CA=CB=4$,可得 $F(2,2,0)$. 设 $E(0,b,3)$,$D(4,0,c)$,则 $\overrightarrow{CD}=(4,0,c)$,$\overrightarrow{FE}=(-2,b-2,3)$. $\because CD\perp FE$,$\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FE}=0$,即 $-8+3c=0$,解得 $c=\frac{8}{3}$.

9. **答案** D

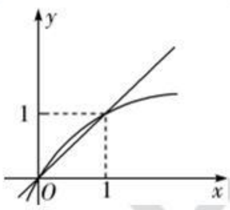
命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$,$\because 10<\lambda<14$,$\therefore 0<14-\lambda<4<\lambda-6$,故焦点在 y 轴上. $\because c^2=(\lambda-6)-(14-\lambda)=2\lambda-20$,离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\therefore \frac{2\lambda-20}{\lambda-6}=\frac{2}{3}$,解得 $\lambda=12$,$\therefore a^2=6$,$b^2=2$,$c^2=4$. 根据椭圆的性质可知 $|PF|_{\max}=a+c=2+\sqrt{6}$.

10. **答案** A

命题意图 本题考查数列与函数的综合问题.

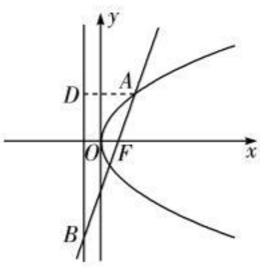
解析 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列,所以 $a_n<a_{n+1}$,即 $a_n<\log_2(a_n+1)$. 如图所示,作出函数 $y=x$ 和 $y=\log_2(x+1)$ 的图象,由图可知,当 $x\in(0,1)$ 时,$x<\log_2(x+1)$,且 $\log_2(x+1)\in(0,1)$. 故当 $a_1\in(0,1)$ 时,$a_1<\log_2(a_1+1)=a_2$,且 $a_2\in(0,1)$,依此类推可得 $a_1<a_2<a_3<\cdots$,满足 $\{a_n\}$ 是递增数列,即 a_1 的取值范围是 $(0,1)$.



11. **答案** C

命题意图 本题考查抛物线与直线的位置关系.

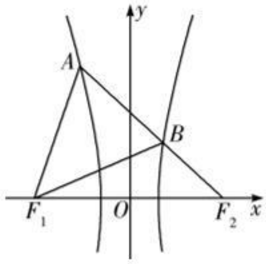
解析 如图,过点 A 作 AD 垂直于 C 的准线,垂足为 D,则根据抛物线定义可知 $|AF|=|AD|$,而 $|AB|=3|AF|$,$\therefore \frac{|AD|}{|AB|}=\frac{1}{3}$. 设直线 l 的倾斜角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,又 $0\leqslant\theta<\pi$,$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,于是直线 l 的斜率为 $\tan\theta=2\sqrt{2}$.



12. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的定义和性质.

解析　如图所示，设 $|BF_2|=k(k>0)$，由双曲线的定义及 $|AF_1|=|BF_1|=5\lambda$，$|AB|=4\lambda$，可得 $|AF_2|-|AF_1|=|BF_1|-|BF_2|$，即 $(4\lambda+k)-5\lambda=5\lambda-k$，解得 $k=3\lambda$，$\therefore 2a=|BF_1|-|BF_2|=5\lambda-3\lambda=2\lambda$，即 $\lambda=a$，$\therefore |AF_1|=5a$. 由 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，$\therefore |AF_2|=7a$. $\because |AF_1|+|AF_2|=24$，$\therefore 12a=24$，$\therefore a=2$，即 $\lambda=2$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　$(0,\pm\sqrt{14})$

命题意图　本题考查双曲线的基本性质.

解析　由双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=-1$ 可得 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=1$，故其焦点在 y 轴上，半焦距为 $\sqrt{8+6}=\sqrt{14}$，所以焦点坐标为 $(0,\pm\sqrt{14})$.

14. **答案**　80

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　由 $a_4+a_5+a_6+a_7=32$ 可得 $a_5+a_6=a_1+a_{10}=16$，则 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=80$.

15. **答案**　-1 或 -11

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　$\because$ 圆 C 的一条直径的两个端点分别在两坐标轴上，$\therefore$ 该圆一定过原点，$\therefore$ 半径为 $\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$，又圆心为 $C(2,1)$，故圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. $\because \angle ACB=120°$，$|CA|=|CB|=\sqrt{5}$，$\therefore$ 圆心 C 到直线 l 的距离为 $\frac{|8-2+\lambda|}{\sqrt{16+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=-11$.

16. **答案**　1 300

命题意图　本题考查直线方程以及等差数列的应用.

解析　根据题意，当该质点到达点 $(25,25)$ 处时，首次落在直线 $x+y-50=0$ 上.

质点到达 $(1,1)$ 处，走过的路程长度为 2；

质点到达 $(2,2)$ 处，走过的路程长度为 $2+4=6$；

质点到达 $(3,3)$ 处，走过的路程长度为 $2+4+6=12$；

……

依此类推，可知质点到达 (n,n) 处，走过的路程长度为 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$，故该质点到达 $(25,25)$ 处时，走过的路程长度为 $25\times26=650$，即经过 1 300 秒.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查直线的方程，点到直线的距离.

解析　(Ⅰ) 由直线 $ax-2y-4a-6=0$ 可得 $a(x-4)-2(y+3)=0$，

$\therefore$ 直线 $ax-2y-4a-6=0$ 过定点 $(4,-3)$，…………（2 分）

$\therefore l$ 的斜率为 $\frac{2+3}{1-4}=-\frac{5}{3}$，…………（3 分）

$\therefore l$ 的方程为 $y-2=-\frac{5}{3}(x-1)$,即 $5x+3y-11=0$. …………(5分)

(Ⅱ)若 l 的斜率不存在,则其方程为 $x=1$,不符合条件, …………(6分)

故 l 的斜率存在,设其斜率为 k,

则 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$,即 $kx-y+2-k=0$. …………(7分)

又点 $B(-2,2)$ 到 l 的距离为 $\frac{9\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \frac{9\sqrt{10}}{10}=\frac{|-2k-2+2-k|}{\sqrt{1+k^2}}$,解得 $k=3$ 或 -3, …………(9分)

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-2=3(x-1)$ 或 $y-2=-3(x-1)$,

即 $3x-y-1=0$ 或 $3x+y-5=0$. …………(10分)

18. **命题意图** 本题考查数列的递推关系以及等差数列的性质.

解析 (Ⅰ)由题意知 $a_na_{n+1}=6S_n-2, a_{n+1}a_{n+2}=6S_{n+1}-2$, …………(1分)

作差可得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=6a_{n+1}$, …………(3分)

$\because a_n\neq 0, \therefore a_{n+2}-a_n=6$. …………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $a_{n+2}-a_n=6$,又由条件可得 $a_1a_2=6S_1-2$,得 $a_2=4$, …………(6分)

$\therefore \{a_n\}$ 的奇数项构成首项为1,公差为6的等差数列;

$\{a_n\}$ 的偶数项构成首项为4,公差为6的等差数列. …………(8分)

又 $a_2-a_1=3$,

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为1,公差为3的等差数列, …………(10分)

$\therefore S_n=n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$. …………(12分)

19. **命题意图** 本题考查椭圆的方程,椭圆与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$,由条件知 $c=1$, …………(1分)

又离心率 $e=\frac{1}{2}, \therefore \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \therefore a=2$, …………(3分)

$\therefore b=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, …………(4分)

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………(5分)

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$.

$\because F(1,0), \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}, \therefore (1-x_1,-y_1)=2(x_2-1,y_2)$, …………(7分)

$\therefore \begin{cases}1-x_1=2(x_2-1),\\ -y_1=2y_2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=3-2x_2,\\ y_1=-2y_2.\end{cases}$ …………(8分)

由 $\begin{cases}\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1,\\ \frac{(3-2x_2)^2}{4}+\frac{(-2y_2)^2}{3}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_2=\frac{7}{4},\\ y_2=\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}.\end{cases}$ …………(10分)

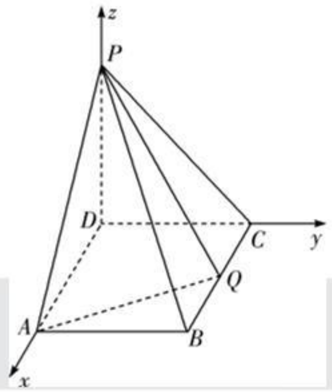
设直线 l 的斜率为 k,

则 $k=\frac{\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{7}{4}-1}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$,故直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$,

即$\sqrt{5}x-2y-\sqrt{5}=0$或$\sqrt{5}x+2y-\sqrt{5}=0$. …………………………………………………………(12 分)

20. **命题意图** 本题考查空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)$\because PD\perp$底面$ABCD$,$AD\perp DC$,故可以点D为坐标原点,DA,DC,DP所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$. ………………………………………………………………(1 分)



则$P(0,0,1)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,$B(\sqrt{2},1,0)$,$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$,

于是$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},1,-1)$,$\overrightarrow{AQ}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$, ……………………………………………………(3 分)

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\sqrt{2},1,-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)=-1+1+0=0$, ……………………………………(5 分)

$\therefore AQ\perp PB$. ……………………………………………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)$\because \overrightarrow{AQ}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,1)$,设平面$APQ$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$, ………………(7 分)

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x_1+z_1=0,\end{cases}$令$x_1=\sqrt{2}$,得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},1,2)$. ……………………………………(9 分)

同理可得平面BPQ的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. ……………………………………………(10 分)

设平面APQ和平面BPQ的夹角为θ,

则$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$. ……………………………………………(12 分)

21. **命题意图** 本题考查等差数列的性质以及数列的综合问题.

解析 (Ⅰ)由$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$可知数列$\{a_n\}$为等差数列,设其公差为d, ……………………………(1 分)

解方程$x^2-18x+65=0$得$x=5$或13,

又$a_7>a_3$,$\therefore a_3=5$,$a_7=13$. …………………………………………………………………(3 分)

$\therefore d=\frac{a_7-a_3}{4}=2$, ……………………………………………………………………………(4 分)

$\therefore a_n=5+2(n-3)=2n-1$. ……………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)由$2^na_n(4-\lambda)>(a_n-1)^2$得$2^n(2n-1)(4-\lambda)>(2n-2)^2$,

$\therefore 4-\lambda>\frac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot 2^{n-2}}$. ……………………………………………………………(6 分)

设$b_n=\frac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot 2^{n-2}}$,

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{n^2}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot 2^{n-2}}=\frac{-2n^3+5n^2-2}{2^{n-1}\cdot(4n^2-1)}$. ……………………………… (7 分)

$\because$ 当 $n=1,2$ 时,$b_{n+1}-b_n>0$, ……………………………… (8 分)

当 $n\geqslant 3$ 时,$b_{n+1}-b_n=\frac{n^2(5-2n)-2}{2^{n-1}\cdot(4n^2-1)}<0$, ……………………………… (9 分)

$\therefore b_n\leqslant b_3=\frac{2}{5}$. ……………………………… (10 分)

$\therefore 4-\lambda>\frac{2}{5}$,即 $\lambda<\frac{18}{5}$,

$\therefore \lambda$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{18}{5}\right)$. ……………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查抛物线的性质,抛物线与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)由条件知准线为 $y=-\frac{p}{2}$, ……………………………… (1 分)

$\because$ 点 $P(x_0,2)$ 到准线的距离为 3,$\therefore 2+\frac{p}{2}=3$,解得 $p=2$, ……………………………… (2 分)

$\therefore C$ 的方程为 $x^2=4y$. ……………………………… (3 分)

(Ⅱ)易知 l 的斜率存在,设 $l:y=kx+b(b>0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+b,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-4kx-4b=0$,

$\therefore x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4b$, ……………………………… (4 分)

$\therefore y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=\frac{(-4b)^2}{16}=b^2$. ……………………………… (5 分)

由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=12$,得 $b^2-4b-12=0$,解得 $b=6$ 或 $b=-2$(舍去), ……………………………… (6 分)

$\therefore l$ 与 y 轴的交点坐标为$(0,6)$. ……………………………… (7 分)

(Ⅲ)易知 $F(0,1)$,设 OA 所在直线的方程为 $y=mx$,$\because A$ 在第二象限,$\therefore m<0$.

联立$\begin{cases}y=mx,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-4mx=0$,解得 $x=0$ 或 $x=4m$,则 $A(4m,4m^2)$, ……………………………… (8 分)

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k_{AE}=\frac{4m^2-5}{4m}$,于是直线 l 的方程为 $y=\frac{4m^2-5}{4m}x+5$. ……………………………… (9 分)

联立$\begin{cases}y=\frac{4m^2-5}{4m}x+5,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-\frac{4m^2-5}{m}x-20=0$,解得 $x=4m$ 或 $x=-\frac{5}{m}$,

$\therefore B\left(-\frac{5}{m},\frac{25}{4m^2}\right)$,则$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{5}{m},1-\frac{25}{4m^2}\right)$,$\overrightarrow{OA}=(4m,4m^2)$. ……………………………… (10 分)

$\because OA\perp BF$,$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BF}=20+4m^2-25=0$,解得 $m=-\frac{\sqrt{5}}{2}$(正值舍去). ……………………………… (11 分)

故直线 OA 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$. ……………………………… (12 分)