郑州市2022年高中毕业年级第一次质量预测
文科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in N|x\leqslant 2\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B$ 的子集的个数为

A. 4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

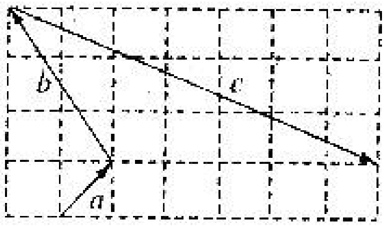
2. 设复数 z 满足 $2i\cdot z=2-3i$，其中 i 为虚数单位，在复平面内，复数 z 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=3$，$S_6=27$，则公比 q 等于

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示，以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为基底，则 $\boldsymbol{c}$ 可表示



A. $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

B. $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$

D. $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

5. 已知命题 p：$\exists x_0\in \mathbf{R}$，$3\sin x_0+4\cos x_0=4\sqrt{2}$；命题 q：$\forall x\in \mathbf{R}$，$\left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}\leqslant 1$，则下列命题中为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\vee \neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

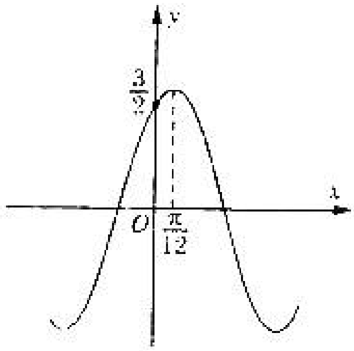
6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，则此双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，$h(x)=\log_2 x$，设这三个函数的增长速度为 f_1，g_1，h_1，当 $x\in(4,+\infty)$ 时，则下列选项中正确的是

A. $f_1>g_1>h_1$　　B. $g_1>f_1>h_1$　　C. $g_1>h_1>f_1$　　D. $f_1>h_1>g_1$

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，$\left(A>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则下列说法错误的是



A. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. 函数 $f(x)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称

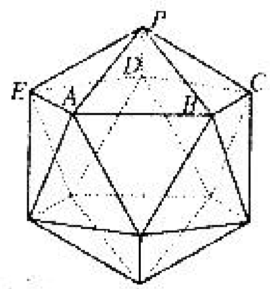
C. 函数 $g(x)=\sqrt{3}\cos2x$ 的图象可由函数 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到

D. 函数 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减

9. 已知函数 $f(x)$的定义域为 R，且 $f(x)$不恒为 0，若 $f(x-2)$为偶函数，$f(3x+1)$为奇函数，则下列选项中一定成立的是

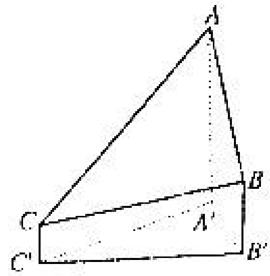
A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$　　C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

10. 许多球状病毒的空间结构可抽象为正二十面体. 正二十面体的每一个面均为等边三角形，共有 12 个顶点，30 条棱. 如图所示，由正二十面体的一个顶点 P 和与 P 相邻的五个顶点可构成正五棱锥 $P-ABCDE$，则 PA 与面 $ABCDE$ 所成角的余弦值约为（　　）（参考数据：$\cos36°\approx0.8$）



A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{5}{6}$

11. 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A,B,C 三点，且 A,B,C 在同一水平面上的投影 A',B',C' 满足$\angle A'C'B'=45°$，$\angle A'B'C'=75°$，由 C 点测得 B 点的仰角为 30°，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45°，则 A,C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 为



A. $100\sqrt{2}$　　B. $100(\sqrt{2}+1)$

C. $100\sqrt{3}$　　D. $100(\sqrt{3}+1)$

12. 函数 $f(x)=|\lg x|-kx-1$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，$f(x)$恰 有 2 个零点；

②存在负数 k，使得 $f(x)$恰有个 1 零点；

③存在负数 k，使得 $f(x)$恰有个 3 零点；

④存在正数 k，使得 $f(x)$恰有个 3 零点.

其中正确命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题(本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分)

13. 已知实数 x,y 满足条件：$\begin{cases} x-y\geqslant 0, \\ x+y-4\leqslant 0, \\ x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x+1}$ 的最大值为______.

14. 甲、乙、丙三位同学打算利用假期外出游览，约定每人从嵩山少林寺、黄河游览区这两处景点中任选一处，那么甲、乙两位同学恰好选取同一处景点的概率是______.

15. 已知一张纸上画有半径为 4 的圆 O，在圆 O 内有一个定点 A，且 OA＝2，折叠纸片，使圆上某一点 A' 刚好与 A 点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕，当 A' 取遍圆上所有点时，所有折痕与 OA' 的交点形成的曲线记为 C，则曲线 C 上的点到圆 O 上的点的最大距离为______.

16. 已知一圆柱的轴截面为正方形，母线长为 $\sqrt{6}$，在该圆柱内放置一个棱长为 a 的正四面体，并且正四面体在该圆柱内可以任意转动，则 a 的最大值为______.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

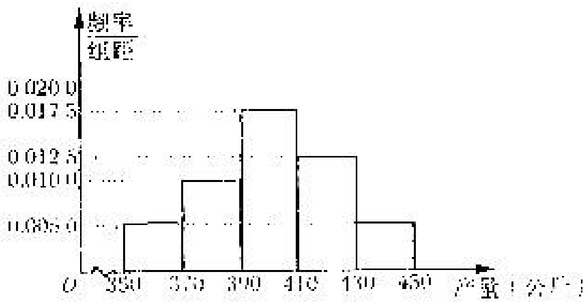
(一)必考题：60 分

17. (本小题满分 12 分)

2021 年 5 月习近平总书记到南阳的医圣祠考察，总书记说，过去中华民族几千年都是靠中医药治病救人，特别是经过抗击新冠肺炎疫情，非典等重大传染病之后，我们对中医药的作用有了更深的认识，我们要发展中医药，注重用现代科学解读中医药学原理，走中西医结合的道路. 某农科所实地考察，研究发现某地适合种植甲、乙两种药材，通过大量考察研究得到如下统计数据：药材甲的亩产量约为 300 公斤，其收购价格处于上涨趋势，最近五年的价格如下表：

年份编号	1	2	3	4	5
年份	2017	2018	2019	2020	2021
单价(元/公斤)	17	19	23	26	30

药材乙的收购价格始终为 21 元/公斤，其亩产量的频率分布直方图如下：



(Ⅰ)若药材甲的单价 y(单位：元/公斤)与年份编号 x 具有线性相关关系，请求出 y 关于 x 的线性回归方程，并估计 2022 年药材甲的单价；

(Ⅱ)用上述频率分布直方图估计药材乙亩平均亩产量，若不考虑其他因素，试判断2022年该地区种植哪种药材收益更高？并说明理由.

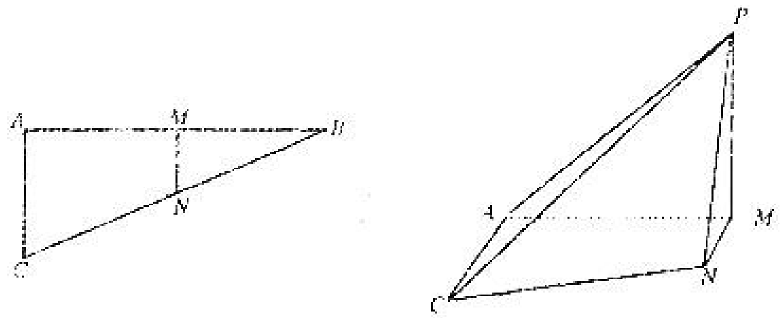
附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

18.(本小题满分12分)

如图，$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$AB=4$，$AC=1$，M、N 分别为 AB、BC 中点，将 $\triangle BMN$ 沿 MN 折起，使点 B 到达点 P，且 $PC=3$.

(Ⅰ)求证：面 $PMN\perp$ 面 $ACNM$；

(Ⅱ)求点 M 到平面 PAC 的距离.



19.(本小题满分12分)

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，前n项和为S_n，现给出下列三个条件：①S_1、S_2、S_4成等比数列；②$S_4=16$；③$S_n=4(a_n+1)$. 请你从这三个条件中任选两个解答下列问题.

(Ⅰ)求a_n的通项公式；

(Ⅱ)若$b_n-b_{n-1}=4a_n(n\geqslant 2)$，且$b_1=3$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+a}$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间及其最大值与最小值.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上不同两点 M、N，满足 $|OM|=|ON|=|MN|=4\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 l 与抛物线 C 相切于点 P，l 与椭圆 $D:\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1$ 相交于 A、B 两点，l 与直线 $y=-2$ 交于点 Q，以 PQ 为直径的圆与直线 $y=-2$ 交于 Q、Z 两点. 求证：直线 OZ 经过线段 AB 的中点.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 在答题卷上将所选题号涂黑，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha, \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2\tan\theta}{\cos\theta}$.

（Ⅰ）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设点 P 的直角坐标系下的坐标为 $(0,1)$，直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，且 $|PA|\cdot|PB|=4$，求直线 l 的倾斜角.

23.［选修：不等式选讲］（10 分）

已知 a，b，c 均为正数，且满足 $2a+3b+4c=9$.

（Ⅰ）证明：$(a+1)(b+1)(c+1)\leqslant 9$；

（Ⅱ）证明：$4a^2+9b^2+16c^2\geqslant 27$.

郑州市2022年高中毕业年级第一次质量预测

文科数学 评分参考

一、选择题

1-5：DCDCB　　6-10：ABDBD　　11-12：BC

二、填空题

13. $\frac{2}{3}$；14. $\frac{1}{2}$；　15.3；　16.2.

17.解　(1) $\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\frac{17+19+23+26+30}{5}=23$.

所以$\hat{b}=\frac{(-2)\times(-6)+(-1)\times(-4)+0\times0+4\times3+2\times7}{(-1)^2+(-2)^2+0+1^2+2^2}=3.3$ ……………………3 分

又因为 $\overline{y}=\hat{b}\,\overline{x}+\hat{a}$，即 $23=3.3\times3+\hat{a}$，解得$\hat{a}=13.1$， ……………………4 分

所以$\hat{y}=3.3x+13.1$；当 $x=6$ 时，$\hat{y}=32.9$. ……………………6 分

(2)$360\times0.1+380\times0.2+400\times0.35+420\times0.25+440\times0.1=401$.

若种植甲种药材每亩地的收入约为 $32.9\times300=9870$，

若种植乙种药材每亩地的收入约为 $401\times21=8\,421<9870$，

所以应该种植甲种药材， ……………………12 分

18.解：(1)连接 MC，ΔABC 为直角三角形，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，

M、N 分别为 AB、BC 中点，　　$\therefore PM\perp MN$ ……………………2 分

又$MC=\sqrt{5},PM=2,PC=3$,

$\therefore PM^2+MC^2=PC^2$,即$PM\perp MC$. ……………………4 分

$MC\cap MN=M$，$\therefore PM\perp$ 面$ACNM$.

$\because PM\subset$ 面PMN，$\therefore$ 面$PMN\perp$ 面$ACNM$ ……………………6 分

（2）$\because\angle A=\frac{\pi}{2}$，$AC=1,AM=2$,

$\therefore S_{\Delta ACM}=1,V_{P-ACM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACM}\times PM=\frac{2}{3}$； ……………………8 分

由（1）得 $PM\perp AC$，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$AM\cap AC=A$,

$\therefore AC\perp$ 面PAM，$\therefore AC\perp AP$.而$PA=2\sqrt{2}$，$\therefore S_{\Delta ACP}=\sqrt{2}$. ……………………10 分

$\therefore M$到面PAC的距离$=\dfrac{3V_{P-ACM}}{S_{\Delta ACP}}=\sqrt{2}.$ ……………………………12 分

19.解：①：因为S_1、S_2、S_4成等比数列，则$S_2^2=S_1S_4$，即$(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)$，

因为$d\neq 0$，可得$d=2a_1$．

②$S_4=4a_1+6d=16$即$2a_1+3d=8$．

③$S_8=4(a_8+1)$，可得$8a_1+28d=4(a_1+7d+1)$，可得$a_1=1$．

若选①②，则有$\begin{cases}d=2a_1\\2a_1+3d=8\end{cases}$，可得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，则$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$；

若选①③，则$d=2a_1=2$，则$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$；

若选②③，则$2a_1+3d=2+3d=8$，可得$d=2$，所以，$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$……………4 分

（2）解：$b_n-b_{n-1}=4a_n=8n-4(n\geq 2)$，且$b_1=3$．

所以，当$n\geq 2$时，则有$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$．

$b_n-b_{n-1}=4a_n=8n-4(n\geq 2)$，则$b_1=3$，

所以，当$n\geq 2$时，则有$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$．

$=3+12+20+\cdots+(8n-4)=3+\dfrac{(8n-4+12)(n-1)}{2}=4n^2-1$，

$b_1=3$也满足$b_n=4n^2-1$，故对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$b_n=4n^2-1$，………………………8 分

则$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以，$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$ ………………12 分

20.解：（1）当$a=0$时，$f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，则$f'(x)=\dfrac{x-2}{x^3}$，$\therefore f(1)=0$，$f'(1)=-1$，

此时，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-(x-1)$，即$x+y-1=0$；……..4 分

（2）因为$f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+a}$，则$f'(x)=\dfrac{-(x^2+a)-2x(1-x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{x^2-2x-a}{(x^2+a)^2}$，

由题意可得 $f'(-1)=\frac{3-a}{(a+1)^2}=0$，解得 $a=3$，……………………………8 分

故 $f(x)=\frac{1-x}{x^2+3}$，$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,3)$…………………10 分

当 $x<1$ 时，$f(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f(x)<0$……………………11 分

所以，$f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(x)_{\min}=f(3)=-\frac{1}{6}$………………12 分

21.解：（1）由题意得：$M(2\sqrt{3},6)$，$\therefore p=1$，$\therefore$ 抛物线的标准方程是：$x^2=2y$ …..4 分

设 $P(t,\frac{t^2}{2})$，故 $\because$ 抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$，$\therefore y'=x$，直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=t$. …………7 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1,\\ \frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{4}=1,\end{cases}$ 两式相减可得

$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-2\bullet\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=-\frac{2}{t}$. 设中点 G，则 $K_{OG}=-\frac{2}{t}$. ………………10 分

又 $\because PZ\perp ZQ, Z(t,-2)$，$\therefore k_{OZ}=\frac{-2}{t}$. …………11 分

$\therefore k_{OG}=k_{OZ}$. 故直线 OZ 经过线段 AB 的中点. …………………………12 分

22. 解：（1）当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=1+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$.

又因为$\rho=\dfrac{2\tan\theta}{\cos\theta}$，所以$\rho=\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$，所以$\rho^2\cos^2\theta=2\rho\sin\theta$，

所以曲线C的直角坐标方程为$x^2=2y(x\neq 0)$……………………5 分

（2）将$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha,\end{cases}$代入$x^2=2y(x\neq 0)$中，

得$t^2\cos^2\alpha-2t\sin a-2=0$，

设A,B对应的参数分别为t_1,t_2,所以$t_1t_2=\dfrac{-2}{\cos^2\alpha}$，

$|PA|\cdot|PB|=4$，所以$|t_1t_2|=\left|\dfrac{-2}{\cos^2\alpha}\right|=4$，所以$\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$\alpha\in[0,\pi)$，所以$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$或$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，

所以直线l倾斜角为$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$或$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$……………………………10 分

23.证明：（1）

$$(a+1)(b+1)(c+1)=\frac{2(a+1)3(b+1)4(c+1)}{24}\le\frac{1}{24}\left(\frac{2a+2+3b+3+4c+4}{3}\right)^3=\frac{1}{24}\times 216=9,$$

当且仅当$a=2$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{2}$时等号成立，

即证：$(a+1)(b+1)(c+1)\le 9$……………………………5 分

（2）由柯西不等式得：

$$(4a^2+9b^2+16c^2)(1+1+1)\ge(2a+3b+4c)^2=81,$$

故$4a^2+9b^2+16c^2\ge 27$.

当且仅当$a=\dfrac{3}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{3}{4}$时等号成立　即证：$4a^2+9b^2+16c^2\ge 27$……………10 分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。