2023届高三高考模拟试卷

数 学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{N}|x<5\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{0,1,2\}$　　B.$\{3,4\}$　　C.$\{-2,-1\}$　　D.$\{-2,-1,0\}$

2.已知复数 $z=\frac{-1+i}{i}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.有3本不同的科技类书，2本不同的文艺类书，若将其随机地并排摆放到书架的同一层上，则同一类别的书都不相邻的概率是

A.$\frac{1}{20}$　　B.$\frac{1}{10}$　　C.$\frac{1}{5}$　　D.[illegible]

4.已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，其公差为 d，若 $\ln a_{[illegible]},\ln a_{[illegible]},\ln a_{[illegible]}$ 也是等差数列，则其公差为

A.$\ln d$　　B.$\ln 2d$　　C.$\ln\frac{2}{3}$　　D.$\ln\frac{[illegible]}{2}$

5.函数 $f(x)=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的部分图象大致形状是

A　　B　　C　　D

6.将函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到曲线 C，则曲线 C 的标准方程是

A.$x^2-y^2=1$　　B.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　C.$y^2-x^2=1$　　D.$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$

7.已知 $a>b>0$，且 $a\log_a b=b$，则 a 的取值范围是(　　)(注：选项中的 e 为自然对数的底数)

A.$(0,1)$　　B.$(1,e)$　　C.$(0,e)$　　D.$(e,+\infty)$

8.鲁班锁是我国传统的智力玩具，起源于中国古代建筑中的榫卯结构，其内部的凹凸部分啮合十分精巧.图1是一种鲁班锁玩具，图2是其直观图.它的表面由八个正三角形和六个正八边形构成，其中每条棱长均为2.若该玩具可以在一个正方体内任意转动(忽略摩擦)，则此正方体表面积的最小值为

图1

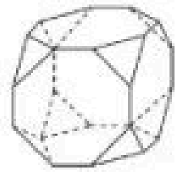


图2

A.$96+48\sqrt{2}$　　B.$120+72\sqrt{2}$　　C.$144+96\sqrt{2}$　　D.$168+96\sqrt{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9.下列命题正确的是

A.若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　B.若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$

C.若 $a>b$，则 $a^3>b^3$　　D.若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$

10.下列说法中正确的是

A.一组数据11,12,12,13,14,15,16,18,20,22的第80百分位数为19

B.若随机变量 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi<4)=0.8$，则 $P(2<\xi<4)=0.4$

C.袋中装有除颜色外完全相同的4个红球和2个白球，从袋中不放回的依次抽取2个球.记事件 $A=\{$第一次抽到的是红球$\}$，事件 $B=\{$第二次抽到的是白球$\}$，则 $P(B|A)=\frac{2}{5}$

D.已知变量 x,y 线性相关，由样本数据算得线性回归方程是 $\hat{y}=0.4x+\hat{a}$，且由样本数据算得 $\bar{x}=$[illegible]，$\bar{y}=3.7$，则 $\hat{a}=2.1$

11.已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则下列说法正确的有

A.若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $|x_1-x_2|_{min}=\pi$

B.将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称

C.若 $f(\omega x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有4个零点，则 ω 的取值范围为 $\left[\frac{15}{4},\frac{19}{4}\right)$

D.$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，令 $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上的值域为 $(0,1)$

12.过抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线 E 于 A,B 两点(点 A 在第一象限)，M 为线段 AB 的中点.若 $|AF|=2|BF|=6$，则下列说法正确的是

A.抛物线 E 的准线方程为 $y=-1$

B.过 A,B 两点作抛物线的切线，两切线交于点 N，则点 N 在以 AB 为直径的圆上

C.若 O 为坐标原点，则 $|OM|=\frac{\sqrt{33}}{2}$

D.若过点 F 且与直线 l 垂直的直线 m 交抛物线于 C,D 两点，则 $|AB|\cdot|CD|=144$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 夹角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，写出一个满足上述条件的向量 $\boldsymbol{a}$ ______.

14.已知锐角 α 满足 $1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}=\frac{1}{\sin\alpha}$，则 $\alpha=$ ______.

15.已知直线 l：$y=\sqrt{3}x$ 与圆心坐标为$(0,t)$（t 为整数）且经过点 $P(2,4)$的圆 C 相切，直线 m：$ax+y+2a=0$ 与圆 C 相交于 A、B 两点，则下列说法正确的是________.

①圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-4)^2=4$；

②若$\angle APB=90°$，则实数 a 的值为 2；

③若 $|AB|=2\sqrt{2}$，则直线 m 的方程为 $x-y+2=0$ 或 $7x-y+14=0$；

④弦 AB 的中点 M 的轨迹方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

16.已知函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x,0<x<1,\\x\ln x,x\geqslant 1,\end{cases}$ 的图象与直线 l_1：$y=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1<x_2$，与直线 l_2：$y=\dfrac{1}{2\cos^2\alpha}$交于两点 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，其中 $x_3<x_4$，则 $x_1x_4+x_2x_3$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

（2）若 $b_n=a_n+n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）记$\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a\sin(B+C)=b(\sin B-\sin C)+c\sin C$.

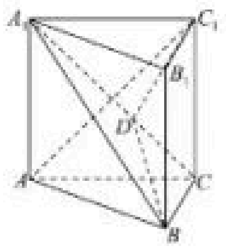
（1）求 A；

（2）若 $a=2\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$ 的面积的最大值.

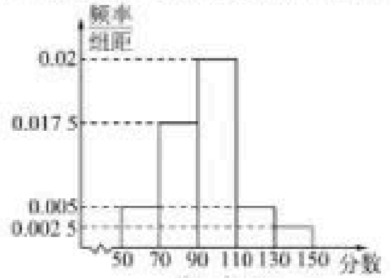
19.（12 分）如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\angle ACB=90°$，$AC_1\perp A_1C$，D 为线段 A_1C 上的动点，$AC_1\perp BD$.

（1）求证：平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC；

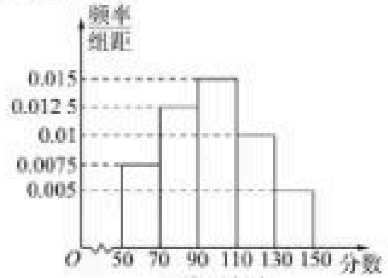
（2）若 $AA_1\perp AC$，D 为线段 A_1C 的中点，$AC=2BC=2$，求 B_1D 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20.（12 分）2022 年底，新冠病毒肆虐全国，某校期末考试时采用了线上考试和线下考试两种形式，现随机抽取 200 名同学的数学成绩做分析，其中线上人数占 40%，线下人数占 60%，通过分别统计他们的数学成绩得到了如下两个频率分布直方图：



线上考试



线下考试

其中(50，70]称为合格，(70，90]称为中等，(90，110]称为良好，(110，130]称为优秀，(130，150]称为优异.

（1）根据频率分布直方图，求这 200 名学生的数学平均分（同一组数据可取该组区间的中点值代替）；

（2）现从这 200 名学生中随机抽取一名同学的数学成绩为良好，试分析他是来自线上考试的可能性大，还是来自线下考试的可能性大.

（3）现从线下考试的学生中随机抽取 10 名同学，且抽到 k 个学生的数学成绩为中等的可能性最大，试求 k 的值.

21.（12 分）已知曲线 C 的方程：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1(x>0)$，倾斜角为 α 的直线 l 过点 $F_2(3,0)$，且与曲线 C 相交于 A，B 两点.

（1）$\alpha=90°$时，求三角形 ABO 的面积；

（2）在 x 轴上是否存在定点 M，使直线 l 与曲线 C 有两个交点 A，B 的情况下，总有$\angle OMA=\angle OMB$？如果存在，求出定点 M；如果不存在，请说明理由.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=x\left(\ln x-\dfrac{1}{2}x-1\right)$，$h(x)=(a-3)x+(1-a+x)\ln x-1$.

（1）$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，求 $F(x)$的最值；

（2）若函数 $g(x)=h(x)-f(x)$恰有两个不同的零点，求 a 的取值范围.

2023届高三高考模拟试卷

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x<5\}=\{0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 A.

2.D 【解析】$z=\frac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}^2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}=1-\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第四象限.故选 D.

3.B 【解析】若同一类别的书都不相邻，则先将 3 本科技类书排序，然后将 2 本文艺类书插入中间 2 个空，所以，同一类别的书都不相邻的概率 $P=\frac{A_3^3A_2^2}{A_5^5}=\frac{1}{10}$.故选 B.

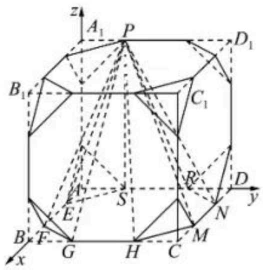
4.D 【解析】因为 $\ln a_1,\ln a_3,\ln a_6$ 是等差数列，所以 $2\ln a_3=\ln a_1+\ln a_6\Rightarrow\ln a_3^2=\ln a_1a_6$，所以 $a_3^2=a_1a_6$，即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+5d)$，可得 $a_1=4d$，所以公差 $\ln a_3-\ln a_1=\ln\frac{a_3}{a_1}=\ln\frac{a_1+2d}{a_1}=\ln\frac{6d}{4d}=\ln\frac{3}{2}$.故选 D.

5.C 【解析】因为 $f(x)=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，定义域关于原点对称，$f(-x)=\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\sin(-x)=-\left(\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right)\sin x=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\sin x=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，图象关于 y 轴对称，故排除选项 B、D；当 $x>0$ 时，令 $f(x)=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $x>0$ 时，两个相邻的零点为 $x=0$ 和 $x=\pi$，当 $0<x<\pi$ 时，$\frac{1-e^x}{1+e^x}<0$，$\sin x>0$，$f(x)=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$.故排除选项 A.故选 C.

6.D 【解析】直线 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 联立得两交点的坐标为$(1,1)$，$(-1,-1)$，这两点间的距离为 $\sqrt{(1+1)^2-(1+1)^2}=2\sqrt{2}$，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$得到的双曲线方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.故选 D.

7.D 【解析】因为 $a\log_a b=b$，故 $a\times\frac{\ln b}{\ln a}=b$，故$\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$，设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，其中 $x>0$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(e,+\infty)$上为减函数，在$(0,e)$上为增函数，但当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)\leqslant0$，而 $a>b>0$，$f(a)=f(b)$，故 $1<b<e$，$a>e$.故选 D.

8.D 【解析】将鲁班锁补成正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，然后以点 A 为坐标原点，AB、AD、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，在鲁班锁所在几何体上任取一个顶点 $P(0,\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$，观察图形可知，$P$ 到鲁班锁所在几何体上其他顶点的距离的最大值在$|PE|$、$|PF|$、$|PG|$、$|PH|$、$|PM|$、$|PN|$、$|PR|$、$|PS|$中取得，结合图形可知 $E(\sqrt{2},0,0)$、$F(2+\sqrt{2},0,0)$、$G(2+2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$、$H(2+2\sqrt{2},2+\sqrt{2},0)$、$M(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2},0)$、$N(\sqrt{2},2+2\sqrt{2},0)$、$R(0,2+\sqrt{2},0)$、$S(0,\sqrt{2},0)$，则$|PE|^2=4+(2+2\sqrt{2})^2=16+8\sqrt{2}$，$|PF|^2=(2+\sqrt{2})^2+2+(2+2\sqrt{2})^2=20+12\sqrt{2}$，$|PG|^2=2(2+2\sqrt{2})^2=24+16\sqrt{2}$，$|PH|^2=2(2+2\sqrt{2})^2+4=28+16\sqrt{2}$，$|PM|^2=(2+2\sqrt{2})^2+2\times(2+\sqrt{2})^2=24+16\sqrt{2}$，$|PN|^2=2+(2+\sqrt{2})^2+(2+2\sqrt{2})^2=20+12\sqrt{2}$，$|PR|^2=4+(2+2\sqrt{2})^2=16+8\sqrt{2}$，$|PS|^2=(2+2\sqrt{2})^2=12+8\sqrt{2}$，所以 P 到鲁班锁所在几何体上其他顶点的距离的最大值为$\sqrt{28+16\sqrt{2}}$，所以，若该玩具可以在一个正方体内任意转动(忽略摩擦)，设该正方体的棱长的最小值为 a，则 $a=\sqrt{28-16\sqrt{2}}$，该正方体的表面积为$S=6a^2=168+96\sqrt{2}$.故选 D.



9.BC 【解析】若 $c=0$，此时 $ac^2=bc^2$，A 错误；若 $a>|b|$，则 $a>0$，故 $|a|>|b|$，两边平方可得：$a^2>b^2$，B 正确；因为 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故若 $a>b$，则 $a^3>b^3$，C 正确；若 $|a|>b$，不妨设 $a=0,b=-2$，不满足 $a^2>b^2$，D 错误.故选 BC.

10.ACD 【解析】对于 A，共有 10 个数，$10\times80\%=8$，所以数据的第 80 百分位数为 18 和 20 的平均数，即为 19，故 A 正确；对于 B，因为随机变量 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi<4)=0.8$，所以 $P(\xi\leqslant2)=0.5$，$P(2<\xi<4)=0.8-0.5=0.3$，故 B 错误；对于 C，由题意可知 $P(A)=\dfrac{C_4^1}{C_6^1}=\dfrac{2}{3}$，$P(AB)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{C_2^1}{C_5^1}=\dfrac{4}{15}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2}{5}$，故 C 正确；对于 D，因为线性回归方程是 $\hat{y}=0.4x+\hat{a}$ 经过样本点的中心 $(\bar{x},\bar{y})$，所以有 $3.7=0.4\times4+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=2.1$，故 D 正确.故选 ACD.

11.ABC 【解析】由 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，A 选项，由 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，故 $f(x_1),f(x_2)$ 必有一个最大值和一个最小值，则 $|x_1-x_2|_{\min}$ 为半个周期长度 $\dfrac{T}{2}=\pi$，正确；B 选项，由题意 $f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 的图象关于 y 轴对称，正确；C 选项，$f(\omega x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，在 $[0,\pi]$ 上 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\right]$ 有且仅有 4 个零点，结合正弦函数的性质知：$4\pi\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}<5\pi$，则 $\dfrac{15}{4}\leqslant\omega<\dfrac{19}{4}$，正确；D 选项，由题意 $g(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cos 2x$，则在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$2x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $g(x)$ 值域为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，错误.故选 ABC.

12.BC 【解析】对于 A，由题意可设过点 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ 的直线 l 的方程为 $y=kx+\dfrac{p}{2}$，$k>0$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=kx+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-(2k^2+1)py+\dfrac{p^2}{4}=0$，可得 $y_1y_2=\dfrac{p^2}{4}$，因为 $|AF|=2|BF|=6$，所以 $\begin{cases}y_2+\dfrac{p}{2}=3,\\ y_1+\dfrac{p}{2}=6,\end{cases}$ 则 $y_1y_2=\left(3-\dfrac{p}{2}\right)\left(6-\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{p^2}{4}$，解得 $p=4$，所以抛物线 $E:x^2=8y$，故抛物线 E 的准线方程为 $y=-2$，故 A 错误；对于 B，因为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，抛物线 $E:x^2=8y$，$y=\dfrac{1}{8}x^2$，$y'=\dfrac{1}{4}x$，易得 $k_{NA}=\dfrac{1}{4}x_1$，$k_{NB}=\dfrac{1}{4}x_2$，$k_{NA}\cdot k_{NB}=\dfrac{1}{16}x_1x_2=-\dfrac{1}{16}\sqrt{4p^2y_1y_2}=-1$，所以直线 NA,NB 垂直，所以点 N 在以 AB 为直径的圆上，故 B 正确；对于 C，由题意得 $y_1=4,y_2=1$，得 $x_1=4\sqrt{2}$，$x_2=-2\sqrt{2}$，$M\left(\sqrt{2},\dfrac{5}{2}\right)$，$|OM|=\sqrt{2+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$，故 C 正确；对于 D，由题意知 $|AB|=9$，设直线 l 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，由 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，易得直线 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+2$，$\cos^2\theta=\dfrac{8}{9}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1}{9}$，根据焦点弦长公式可得 $|CD|=\dfrac{2p}{\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=72$，所以 $|AB|\cdot|CD|=9\times72=648$.故 D 错误.故选 BC.

13.$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$(答案不唯一) 【解析】设 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，又向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right)$，在该区间任取一个角 θ 即可.不妨取 $\theta=\dfrac{11\pi}{6}$，则 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.故答案为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$(答案不唯一).

14.50° 【解析】$1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan80^\circ}=\dfrac{\sin80^\circ+\sqrt{3}\cos80^\circ}{\sin80^\circ}=\dfrac{2\sin(80^\circ+60^\circ)}{\sin80^\circ}=\dfrac{2\sin140^\circ}{2\sin40^\circ\cos40^\circ}=\dfrac{2\sin40^\circ}{2\sin40^\circ\cos40^\circ}=\dfrac{1}{\cos40^\circ}=\dfrac{1}{\sin50^\circ}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，则 $\sin\alpha=\sin50^\circ$，因为 α 为锐角，所以 $\alpha=50^\circ$.故答案为 50°.

15.①③ 【解析】对于①，设圆 C 的半径为 r，由题意可得圆 C 的方程为 $x^2+(y-t)^2=r^2$(t 为整数)，根据点 $P(2,4)$ 是圆 C 上的点，且圆 C 与直线 $l:\sqrt{3}x-y=0$ 相切，得 $\begin{cases}2^2+(4-t)^2=r^2,\\ \dfrac{|t|}{2}=r,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=4,\\ r=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=\dfrac{20}{3},\\ r=\dfrac{10}{3},\end{cases}$(舍去)，则圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-4)^2=4$，故①正确；对于②，由①知圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-4)^2=4$，圆心 $C(0,4)$，∵点 $P(2,4)$ 在圆 C 上，且 $\angle APB=90^\circ$，∴线段 AB 为圆 C 的直径，∵直线 $m:ax+y+2a=0$ 与圆 C 相交于 A、B 两点，∴圆心 $C(0,4)$ 在直线 m 上，∴$4+2a=0$，解得 $a=-2$，故②错误；对于③，由①知圆 C 的半径为 2，圆心 $C(0,4)$，则圆心 C 到直线 m 的距离 $d=\dfrac{|4+2a|}{\sqrt{1+a^2}}$，∵$\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2+d^2=r^2$，即 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2+$

$d^2=2^2$，解得 $d=\sqrt{2}$，$\therefore \frac{|4+2a|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{2}$，整理得 $a^2+8a+7=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-7$，则直线 m 的方程为 $x-y+2=0$ 或 $7x-y+14=0$，故③正确；对于④，直线 m 的方程可化为 $y=-a(x+2)$，过定点 $N(-2,0)$，由圆的性质可得 $CM\perp MN$，$\therefore$ 点 M 的轨迹是以线段 CN 为直径的圆弧，则此圆弧的圆心为线段 CN 的中点，其坐标为 $(-1,2)$，半径为 $\frac{1}{2}|CN|=\sqrt{5}$，则该圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，由 $\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=5,\\ x^2+(y-4)^2=4,\end{cases}$ 得两圆的交点坐标为 $(-2,4)$ 与 $\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$，故弦 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，$\left(-2<x<\frac{6}{5}\right)$，故④错误.故答案为①③.

16.$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ 【解析】当 $0<x<1$ 时，$f(x)=xe^x$，则 $f'(x)=(1+x)e^x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，且 $f(x)\in(0,e)$；当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=1+\ln x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，若要使 $f(x)\in(0,e)$，则 $x\in(1,e)$，所以 $x_2,x_4\in(1,e)$，$\ln x_2,\ln x_4\in(0,1)$.因为函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x,0<x<1,\\ x\ln x,x\geq 1,\end{cases}$ 的图象与直线 $l_1:y=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ 的图象交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $x_1e^{x_1}=x_2\cdot\ln x_2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$，$x_1e^{x_1}=\ln x_2\cdot e^{\ln x_2}$，所以 $x_1=\ln x_2$，即 $x_2=e^{x_1}$，所以 $x_1x_2=x_1e^{x_1}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$，同理 $x_3x_4=\frac{1}{2\cos^2\alpha}$，所以，$x_1x_2+x_3x_4=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{2\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{3}{2}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\geq\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$，即 $\tan^2\alpha=\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $x_1x_2+x_3x_4$ 的最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，故答案为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

17.**解**：(1)因为 $a_{n+1}=2a_n-1$，所以 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$. ………… 1 分

因为 $a_1=2$，则 $a_2=2a_1-1=3$，$a_3=2a_2-1=5$，…，以此类推可知，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\geq 2$，

所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$， ………… 3 分

又 $a_1-1=1$，所以数列 $\{a_n-1\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

$a_n-1=2^{n-1}$，即 $a_n=2^{n-1}+1$. ………… 5 分

(2)由(1)可知 $a_n=2^{n-1}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $b_n=a_n+n=2^{n-1}+n+1$. ………… 6 分

又由题知 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(2^0+2)+(2^1+3)+(2^2+4)+\cdots+(2^{n-1}+n+1)$

$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+[2+3+4+\cdots+(n+1)]=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{n(2+n+1)}{2}$

$=2^n+\frac{n^2+3n}{2}-1$. ………… 10 分

18.**解**：(1)由 $a\sin(B+C)=b(\sin B-\sin C)+c\sin C$，得 $a\sin A=b\sin B+(c-b)\sin C$，

由正弦定理，得 $a^2=b^2-(c-b)c=b^2+c^2-bc$. ………… 3 分

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$. ………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，$a=2\sqrt{5}$，

所以 $b^2+c^2-20=bc$， ………… 8 分

$\because b^2+c^2\geq 2bc$ $\therefore b^2+c^2-20=bc\geq 2bc-20$，

所以 $bc\leq 20$，当且仅当 $b=c$ 时取"$=$". ………… 10 分

所以三角形的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A\leq 5\sqrt{3}$.

所以三角形面积的最大值为 $5\sqrt{3}$. ………… 12 分

19.(1)**证明**：已知 $A_1C\perp AC_1$，又 $AC_1\perp BD$，A_1C，$BD\subset$ 平面 A_1BC，$A_1C\cap BD=D$，

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC. ………………………………………………………… 1 分

又 $BC\subset$ 平面 A_1BC,所以 $AC_1\perp BC$. ………………………………………………… 2 分

因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $BC\perp AC$. ……………………………………………………… 3 分

又 $AC\cap AC_1=A$,AC,$AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1. ……………………… 4 分

又 $BC\subset$ 平面 ABC,所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC. ………………………………………… 5 分

(2)**解**:由(1)知平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC,

又平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$,$AA_1\perp AC$,

所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC.

又 $A_1A\parallel C_1C$,

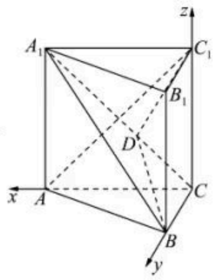
所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC,所以 CA,CB,CC_1 两两垂直. ……………………………………… 6 分

以 C 为坐标原点,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,

建立空间直角坐标系如图所示:

因为 $AA_1\perp AC$,所以四边形 ACC_1A_1 为矩形,又因为 $AC_1\perp A_1C$,所以四边形 ACC_1A_1 为正方形.

因为 $AC=2$,$BC=1$,所以 $CC_1=2$.



所以 $C(0,0,0)$,$B(0,1,0)$,$A_1(2,0,2)$,$B_1(0,1,2)$.

由 D 是线段 A_1C 的中点,得 $D(1,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{B_1D}=(1,-1,-1)$. ……………………………… 7 分

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ 2x+2z=0,\end{cases}$

取 $x=1$,则 $z=-1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$ 为平面 A_1BC 的一个法向量. ……………………………… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1D}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{B_1D}|}=\dfrac{1\times1+0\times(-1)+(-1)\times(-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………… 10 分

设直线 B_1D 与平面 A_1BC 所成的角为 α,则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1D}\rangle|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………………… 11 分

所以直线 B_1D 与平面 A_1BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12 分

20.**解**:(1)线上同学平均分为 $(60\times0.005+80\times0.0175+100\times0.02+120\times0.005+140\times0.0025)\times20=93$ 分; ……………… 1 分

线下同学平均分为 $(60\times0.0075+80\times0.0125+100\times0.015+120\times0.01+140\times0.005)\times20=97$ 分; ……………… 2 分

又 200 名同学,线上人数占 40%,线下人数占 60%,

所以所有 200 名同学的平均分为 $\dfrac{93\times200\times40\%+97\times200\times60\%}{200}=95.4$ 分. ……………………………… 4 分

(2)线上同学成绩良好人数为 $0.02\times20\times200\times40\%=32$ 人, ……………………………………… 5 分

线下同学成绩良好人数为 $0.015\times20\times200\times60\%=36$ 人, ……………………………………… 6 分

因为 $\dfrac{32}{200}<\dfrac{36}{200}$,所以抽取这一名数学成绩为良好的同学来自线下考试的可能性大. ……………………… 7 分

(3)由线下成绩中等同学人数为 $0.0125\times20\times200\times60\%=30$ 人,其它同学为 90 人,

所以从线下学生中随机抽取 10 名同学,抽到 k 个学生的成绩为中等的概率 $P(X=k)=\dfrac{C_{30}^{k}C_{90}^{10-k}}{C_{120}^{10}}$,$1<k<10$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$, …… 8 分

要使 $P(X=k)$ 最大,则 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\ P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{C_{30}^{k}C_{90}^{10-k}}{C_{120}^{10}}\geqslant\dfrac{C_{30}^{k-1}C_{90}^{11-k}}{C_{120}^{10}},\\ \dfrac{C_{30}^{k}C_{90}^{10-k}}{C_{120}^{10}}\geqslant\dfrac{C_{30}^{k-1}C_{90}^{9-k}}{C_{120}^{10}},\end{cases}$ ……………………………… 9 分

所以$\begin{cases}k^2+80k\leqslant k^2-42k+341,\\ k^2-40k+300\leqslant k^2+82k+81,\end{cases}$ …………………………………… 11 分

则$\frac{219}{122}\leqslant k\leqslant\frac{341}{122}$，故 $k=2$. …………………………………… 12 分

21.**解**：(1)由$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x>0)$知曲线为以 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，实轴长为 4 的双曲线的右支，

过焦点 $F_2(3,0)$，倾斜角为 90°的直线方程为 $x=3$，当 $x=3$ 时 $y=\pm\frac{5}{2}$，…………………………………… 2 分

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$. …………………………………… 4 分

(2)当 $\alpha\neq90°$时，设直线 l 的方程为：$y=k(x-3)$，联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\\ y=k(x-3),\end{cases}$ 整理得$(5-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-20=0$，…… 5 分

因为直线 l 与曲线 C 有两个交点，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以$\begin{cases}5-4k^2\neq0,\\ x_1+x_2=\frac{24k^2}{4k^2-5}>0,\\ x_1\cdot x_2=\frac{-36k^2-20}{5-4k^2}>0,\\ \Delta=(24k^2)^2-4(5-4k^2)(-36k^2-20)>0.\end{cases}$ …………………………………… 6 分

解得 $k<-\frac{\sqrt{5}}{2}$或 $k>\frac{\sqrt{5}}{2}$，…………………………………… 7 分

由$\angle AMO=\angle BMO$ 得 x 轴平分$\angle AMB$，所以 $k_{AM}+k_{BM}=0$，

$y_1=k(x_1-3)$，$y_2=k(x_2-3)$，

则 $x_2y_1+x_1y_2=2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-6)$. …………………………………… 8 分

假设在 x 轴上存在定点 $M(m,0)$，则 $k_{AM}=\frac{y_1}{x_1-m}$，$k_{BM}=\frac{y_2}{x_2-m}$.

$k_{AM}+k_{BM}=\frac{y_1}{x_1-m}+\frac{y_2}{x_2-m}=0$，即 $y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)=0$，

展开可得 $x_2y_1+x_1y_2-m(y_1+y_2)=0\Rightarrow2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)-mk(x_1+x_2-6)=0$. …………………………………… 9 分

因为斜率 k 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$，

所以 $2x_1x_2-(m+3)(x_1+x_2)+6m=0$，即$\frac{72k^2+40}{4k^2-5}-\frac{24k^2(m+3)}{4k^2-5}+6m=0$，

整理可得：$72k^2+40-24k^2(m+3)+6m(4k^2-5)=0$，

即 $30m=40$，得 $m=\frac{4}{3}$，…………………………………… 10 分

当 $\alpha=90°$时，由曲线的对称性可知成立，…………………………………… 11 分

所以 x 轴上存在定点 $M\left(\frac{4}{3},0\right)$，总有$\angle OMA=\angle OMB$. …………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由题意可得 $F(x)=\frac{f(x)}{x}=\ln x-\frac{1}{2}x-1$，定义域为$(0,+\infty)$.

设 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$，由 $F'(x)>0$，得 $0<x<2$，由 $F'(x)<0$，得 $x>2$，

则 $F(x)$在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，…………………………………… 2 分

$F(x)_{\max}=F(2)=\ln2-\frac{1}{2}\times2-1=\ln2-2$，

故 $F(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值是 $\ln2-2$，无最小值. …………………………………… 4 分

(2)由题意可得 $g(x)=h(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2+(a-2)x-(1-a)\ln x-1$，$g'(x)=x+a-2+\frac{1-a}{x}=\frac{x^2+(a-2)x+1-a}{x}=$

$\dfrac{(x+a-1)(x-1)}{x}$,

$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. …………………………………………………………………………………… 5 分

①当$1-a<0$,即$a>1$时,$x>1$时$g'(x)>0$,$0<x<1$时$g'(x)<0$,

则$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

因为$x\to0$时,$g(x)\to+\infty$,$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

所以$g(x)$要有两个零点,

则$g(1)=\dfrac{1}{2}+a-2-1<0$,解得$a<\dfrac{5}{2}$,故$1<a<\dfrac{5}{2}$; …………………………………………………… 6 分

②当$1-a=0$,即$a=1$时,由$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-1=0$,解得$x=1\pm\sqrt{3}$,

因为$x>0$,所以$x=1+\sqrt{3}$,则$g(x)$有且仅有1个零点,故$a=1$不符合题意; ………………………………… 7 分

③当$0<1-a<1$,即$0<a<1$时,由$g'(x)>0$,得$0<x<1-a$或$x>1$,

由$g'(x)<0$,得$1-a<x<1$,

则$g(x)$在$(0,1-a)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$(1-a,1)$上单调递减.

因为$x\to0$时,$g(x)<0$,$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

所以$g(x)$要有两个零点,则$g(1)=\dfrac{1}{2}+a-2-1=0$或$g(1-a)=\dfrac{1}{2}(1-a)^2+(a-2)(1-a)+(1-a)\ln(1-a)-1=0$,

若$g(1)=0$,解得$a=\dfrac{5}{2}$,不符合题意,

若$g(1-a)=0$,设$t=1-a\in(0,1)$,则$g(1-a)=0$化为$\dfrac{1}{2}t^2+t(-t-1)+t\ln t-1=-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$,

$0<t<1$时,$t\ln t<0$,$-\dfrac{1}{2}t^2-t-1=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2-\dfrac{1}{2}<0$,

所以$-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1<0$,$-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$无解,

即$g(1-a)=0$无解,故$0<a<1$不符合题意; …………………………………………………………………………… 9 分

④当$1-a=1$,即$a=0$时,$g'(x)\geqslant0$恒成立,则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,从而$g(x)$最多有1个零点,则$a=0$不符合题意;
…… 10 分

⑤当$1-a>1$,即$a<0$时,由$g'(x)>0$,得$0<x<1$或$x>1-a$,由$g'(x)<0$,得$1<x<1-a$,

则$g(x)$在$(0,1)$和$(1-a,+\infty)$上单调递增,在$(1,1-a)$上单调递减.

因为$x\to0$时,$g(x)<0$,$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

所以$g(x)$要有两个零点,则$g(1)=0$或$g(1-a)=0$.

若$g(1)=\dfrac{1}{2}+a-2-1=0$,解得$a=\dfrac{5}{2}$,不符合题意,

若$g(1-a)=\dfrac{1}{2}(1-a)^2+(a-2)(1-a)+(1-a)\ln(1-a)-1=0$.

设$t=1-a\in(1,+\infty)$,则$g(1-a)=0$化为$\dfrac{1}{2}t^2+t(-t-1)+t\ln t-1=-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$.

由(1)知$y=t\ln t-\dfrac{1}{2}t^2-t-1$在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1<0$,$-\dfrac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$无解,

即$g(1-a)=0$无解,故$a<0$不符合题意. …………………………………………………………………………… 11 分

综上,a的取值范围是$\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$. …………………………………………………………………………… 12 分

关于我们