

参考答案及解析

理科数学

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A = \{x | -|x| + 2 \geq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y | y = (x-1)^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$, 所以 $A \cap B = [1, 2]$.

2. A 【解析】由题意得 $\bar{z} = \frac{9+3i}{1+2i} = \frac{(9+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{9-18i+3i+6}{5} = 3-3i$, 则 $z = 3+3i$, 所以 z 在复平面内对应的点为 $(3, 3)$, 位于第一象限.

3. A 【解析】若 $a > 1 > b$, 则 $a-1 > 0, b-1 < 0$, 所以 $(a-1)(b-1) < 0$, 所以 $ab+1 < a+b$, 所以 p 是 q 的充分条件; 若 $ab+1 < a+b$, 不妨取 $a = \frac{1}{2}, b = 5$, 不满足 $a > 1 > b$, 所以 p 不是 q 的必要条件, 故 p 是 q 的充分不必要条件.

4. D 【解析】由题意得 $\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ) = 7\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$. 令 $A = \sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ), B = \cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$, 则 $A = 7B$ ①. 又 $A-B = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ②, 所以联立①②, 解得 $A = \frac{7}{12}, B = \frac{1}{12}$, 故 $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ) = \frac{1}{12}$.

5. C 【解析】对于选项 A, R&D 经费总量的平均数为 $\frac{1}{7} \times (15\ 677 + 17\ 606 + 19\ 678 + 22\ 144 + 24\ 393 + 27\ 956 + 30\ 870) \approx 22\ 617.7$, 所以 A 错误; 对于选项 B, R&D 经费总量的中位数为 22 144 亿元, 所以 B 错误; 对于选项 C, R&D 经费与 GDP 之比的极差为 $2.55\% - 2.10\% = 0.45\%$, 所以 C 正确; 对于选项 D, R&D 经费与 GDP 之比增幅最大的是 2019 年到 2020 年, 所以 D 错误.

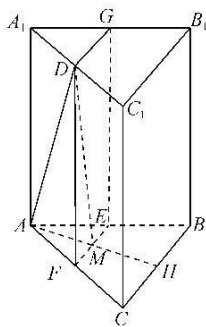
6. A 【解析】由题意得 $a_{n+1} - a_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \dots + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - \frac{2}{n}$, 当 $n=1$ 时也满足上式, 所以 $a_n = 1 - \frac{2}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $b_1 = \langle -1 \rangle = -1, b_2 = \langle 0 \rangle = 0, b_3 = \langle 1 - \frac{2}{3} \rangle = 1, b_4 = \langle 1 - \frac{2}{4} \rangle = 1, b_5 = b_6 = \dots = 1$, 故 $\{b_n\}$ 的前 2 023 项和为 $-1 + 0 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2\ 020$.

7. C 【解析】第一次循环: $a = 0 + 1 = 1, S = 0 + 1 = 1$, 不满足输出条件, $i = 2$; 第二次循环: $a = 1 + 2 = 3, S = 1 + 3 = 4$, 不满足输出条件, $i = 3$; 第三次循环: $a = 3 + 3 = 6, S = 4 + 6 = 10$, 不满足输出条件, $i = 4$; 第四次循环: $a = 6 + 4 = 10, S = 10 + 10 = 20$, 不满足输出条件, $i = 5$; 第五次循环: $a = 10 + 5 = 15, S = 20 + 15 = 35$, 不满足输出条件, $i = 6$; 第六次循环: $a = 15 + 6 = 21, S = 35 + 21 = 56$, 满足输出条件, 退出循环. 所以判断框中的条件可填入 " $i < 6$ ".

8. A 【解析】如图所示, 分别取棱 AB, AC, BC, A_1B_1 的中点 E, F, H, G , 连接 EF, DF, DG, EG, AH , 设 $AH \cap EF = M$, 连接 DM , 则易知平面 $EFDG \parallel$ 平面 B_1BCC_1 . 又因为 H 为 BC 的中点, 所以 $AH \perp BC$, 易知 $AH \perp$ 平面 B_1BCC_1 , 从而 $AH \perp$ 平面 $EFDG$, 因此 $AM \perp$ 平面 $EFDG$, 则 $\angle ADM$ 即为 AD 与平面 $EFDG$ 所成的角, 且等于直线 AD 与平面 B_1BCC_1 所成的角.

设 $AB = a$, 则 $AA_1 = 2a, AD = \frac{\sqrt{17}}{2}a, AM = \frac{1}{2}AH = \frac{\sqrt{3}}{4}a$, 所以 $\sin \angle ADM = \frac{AM}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{\frac{\sqrt{17}}{2}a} = \frac{\sqrt{51}}{34}$, 所以直

线 AD 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{51}}{34}$.



9. B 【解析】因为 $a = \log_4 8 = \frac{3}{2}, b = \frac{e^2}{4} > \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, 所以 $b > a$. 令函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 所以 $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\frac{e^{2\ 023}}{2\ 023^2} > \frac{e^2}{4}$, 即 $c > b$, 所以 $c > b > a$.

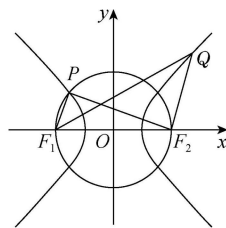
10. C 【解析】因为 $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}$

高考押题卷

· 全国卷 ·

$\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$, 所以 $f(n)$ 单调递减, 则 $f(1600) > \gamma \approx 0.5772$, 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1600} > 0.5772 + \ln 1600 \approx 7.955$. 因为 $g(n+1) - g(n) = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$, 所以 $g(n)$ 单调递增, 则当 n 趋近于 $+\infty$ 时, $g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n + [\ln n - \ln(n+1)] < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \approx 0.5772$, 所以 $g(1599) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1599} - \ln 1600 < 0.5772$, 所以 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1600} < \ln 1600 + \frac{1}{1600} + 0.5772 < \ln 1600 + \frac{1}{1000} + 0.5772 \approx 7.3778 + 0.001 + 0.5772 = 7.956$, 故 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1600}$ 所在的区间为 $(7.5, 8)$.

11. A 【解析】如图, 连接 PF_2, QF_1 , 由题意知 $|F_1F_2| = 2c, c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 设 $\angle PF_1F_2 = \varphi$, $|PF_1| = m$, 由双曲线的定义可得 $|PF_2| = 2a + m$. 又由题可得 $PF_1 \perp PF_2$, 所以 $m^2 + (2a + m)^2 = 4c^2$, 即 $m^2 = 2b^2 - 2am$. 在 $\text{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中, $\cos \angle PF_1F_2 = \cos \varphi = \frac{m}{2c}$, 由 $\overrightarrow{F_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$, 得 $|F_2Q| = \frac{3m}{2}$, 由双曲线的定义可得 $|F_1Q| = 2a + \frac{3m}{2}$. 因为 $\overrightarrow{F_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$, 所以 $F_1P \parallel F_2Q$, 所以 $\angle QF_2F_1 = \pi - \varphi$, 在 $\triangle F_1F_2Q$ 中, $\cos \angle QF_2F_1 = -\cos \varphi = -\frac{m}{2c}$, 又由余弦定理可得 $|QF_1|^2 = |QF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|QF_2| \cdot |F_1F_2| \cdot \cos \angle QF_2F_1$, 即 $\left(2a + \frac{3m}{2}\right)^2 = \left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (2c)^2 - 2 \cdot \frac{3m}{2} \cdot 2c \cdot \left(-\frac{m}{2c}\right)$, 所以 $6am = 4b^2 + 3m^2$. 又因为 $m^2 = 2b^2 - 2am$, 所以 $b = \sqrt{3}m, a = \frac{5}{2}m$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{37}{4}m^2$, 故 $c = \frac{\sqrt{37}}{2}m$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{37}}{2}m}{\frac{5}{2}m} = \frac{\sqrt{37}}{5}$.



12. B 【解析】令 $f(x) = 0$, 得 $x^3 + (m-1)x^2 + (n-m-1)x - n + 1 = 0$, 所以 $x^3 - x^2 + mx^2 - mx + (n-1)x - (n-1) = 0$, 所以 $x^2(x-1) + mx(x-1) + (n-1)(x-1) = 0$, 所以 $(x-1)(x^2 + mx + n - 1) = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x^2 + mx + n - 1 = 0$. 由题意得方程 $x^2 + mx + n - 1 = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有两个不同的实数根, 设两根分别为 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 则 $\Delta = m^2 - 4(n-1) > 0$, $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = n-1$, 所以 $m = -(x_1 + x_2), n = x_1x_2 + 1$, 所以 $m^2 - n^2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1x_2 + 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 - 1 = -(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$. 因为 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 所以 $0 \leq x_1^2 < 1, 0 \leq x_2^2 < 1$, 所以 $-1 \leq x_1^2 - 1 < 0, -1 \leq x_2^2 - 1 < 0$. 又 $x_1 \neq x_2$, 所以 $-1 < -(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) < 0$, 即 $m^2 - n^2$ 的取值范围是 $(-1, 0)$.

二、填空题

13. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $(a-2b) \cdot (3a+5b) = 3a^2 - a \cdot b - 10b^2 = -7 - a \cdot b = -\frac{22}{3}$, 所以 $a \cdot b = \frac{1}{3}$. 又 a, b 是单位向量, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{3}$.

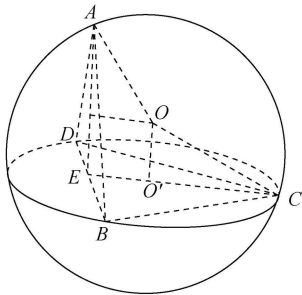
14. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ 【解析】连接 OM, CN, OC , 则 $OM \perp AB, CN \perp DE$. 过点 C 作 $CF \perp OM$, 垂足为点 F , 则四边形 $CNMF$ 为矩形, 所以 $|CF| = |MN|, |CN| = |MF|$. 又 $|OM| = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}, |CN| = \frac{|2-3+4|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以 $|OF| = |OM| - |MF| = |OM| - |CN| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 又 $|OC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, 所以 $|MN| = |CF| = \sqrt{|OC|^2 - |OF|^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

15. $\frac{20\pi}{3}$ 【解析】如图, 设 $AC \cap BD = E$, 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, $A = \frac{\pi}{3}, AB = 2$, 所以 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 均是边长为 2 的等边三角形, 则 $AE = EC = \sqrt{3}$. 因为翻折后点 A 到平面 BCD 的距离最大, 所以平面 $ABD \perp$ 平面 BCD . 设 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O' , 四面体 $ABCD$ 的外接球的球心为 O , 则 $OO' \perp$ 平面 BCD , 且 $O'C = \frac{2\sqrt{3}}{3}, O'E = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 设 $OO' = h$, 则

理科数学

参考答案及解析

$(\sqrt{3}-h)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$, 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以外接球的半径 $R = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 所以四面体 ABCD 的外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{20\pi}{3}$.



16. $4-8\ln 2$ 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^x$, 得 $f'(x) = \frac{1}{2}(x+5)e^x$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $g(x) = x[\ln(2x)+4] = \frac{1}{2}e^{\ln(2x)}[\ln(2x)+4] = f(\ln(2x))$, 所以 $f(x_1) = g(x_2) = a$, 即 $f(x_1) = f(\ln(2x_2)) = a$. 又 $a > 2$, 且易知当 $x \leq 0$ 时, $f(x) \leq 2$, 所以 $x_1 = \ln(2x_2)$, 所以 $2x_2 = e^{x_1}$, 所以 $x_1x_2 + 4x_2 - 4\ln a = (x_1+4)x_2 - 4\ln a = \frac{1}{2}(x_1+4)e^{x_1} - 4\ln a = a - 4\ln a$. 令 $m(a) = a - 4\ln a$, $a > 2$, 所以 $m'(a) = 1 - \frac{4}{a} = \frac{a-4}{a}$, 当 $a \in (2, 4)$ 时, $m'(a) < 0$, $m(a)$ 单调递减; 当 $a \in (4, +\infty)$ 时, $m'(a) > 0$, $m(a)$ 单调递增, 所以当 $a = 4$ 时, $m(a)$ 取得最小值 $m(4) = 4 - 8\ln 2$, 故 $x_1x_2 + 4x_2 - 4\ln a$ 的最小值为 $4 - 8\ln 2$.

三、解答题

17. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_3 = 5$, 得 $a_1 + 2d = 5$. (1分)
因为 $S_6 = (a_2+1)S_3$, 所以 $6a_1 + 15d = (a_1+d+1)(3a_1+3d)$, 整理得 $2(a_1+2d)+d = (a_1+2d+1-d)(a_1+2d-d)$, (3分)
所以 $10+d = (6-d)(5-d)$, 即 $d^2 - 12d + 20 = 0$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 10$.
当 $d = 2$ 时, $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = a_1 + d = 3 > 0$, 符合题意;
当 $d = 10$ 时, $a_1 = -15$, 所以 $a_2 = a_1 + d = -5 < 0$, 不符合题意, 舍去, (4分)
所以 $a_n = 2n - 1$. (5分)

(2) 由 (1) 知 $S_n = \frac{(2n-1+1)n}{2} = n^2$, 则 $\frac{n+S_n}{3^n} = \frac{n^2+n}{3^n}$, (6分)

所以 $T_n = \frac{1^2+1}{3} + \frac{2^2+2}{3^2} + \frac{3^2+3}{3^3} + \dots + \frac{n^2+n}{3^n}$,
则 $\frac{1}{3}T_n = \frac{1^2+1}{3^2} + \frac{2^2+2}{3^3} + \frac{3^2+3}{3^4} + \dots + \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$, (7分)

两式相减, 得 $\frac{2}{3}T_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \right) - \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$.

令 $P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$,
则 $\frac{1}{3}P_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}}$, (9分)

两式相减, 得 $\frac{2}{3}P_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$
 $\frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{2 \times 3^{n+1}}$,

所以 $P_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n}$,
所以 $\frac{2}{3}T_n = 2 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n} \right) - \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$,
所以 $T_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^{n-1}} - \frac{n^2+n}{2 \times 3^n} = \frac{9}{4} - \frac{2n^2+8n+9}{4 \times 3^n}$. (12分)

18. 解: (1) 由直方图可知 $(0.008 + 0.016 + 0.020 + a + 0.044 + 0.040 + 0.028 + 0.008) \times 5 = 1$,
解得 $a = 0.036$. (2分)
因为 $(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036) \times 5 = 0.4 < 0.5$,
 $(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036 + 0.044) \times 5 = 0.62 > 0.5$,
所以学员该项技能的评价指标的中位数在 $[80, 85)$ 内.
设学员该项技能的评价指标的中位数为 m , 则 $(m - 80) \times 0.044 + 0.4 = 0.5$,
解得 $m \approx 82.3$. (5分)

(2) 由题意可知抽取的 12 名学员中该项技能的评价指标在 $[70, 75)$ 内的有 4 名, 在 $[85, 90)$ 内的有 8 名.
由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4. (6分)

$$P(X=0) = \frac{C_8^5}{C_{12}^5} = \frac{7}{99},$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^4 C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{35}{99},$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^3 C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{14}{33},$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^2 C_4^3}{C_{12}^5} = \frac{14}{99},$$

高考押题卷

· 全国卷 ·

$$P(X=4) = \frac{C_8^3 C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{1}{99}, \quad (8 \text{分})$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$

(10分)

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{99} + 1 \times \frac{35}{99} + 2 \times \frac{14}{33} + 3 \times \frac{14}{99} + 4 \times \frac{1}{99} = \frac{5}{3}. \quad (12 \text{分})$$

19. (1) 证明: 如图, 取 PC, PD 的中点分别为 E, F, 连接 BE, AF, EF, CF,

所以 $EF \parallel CD$, 且 $EF = \frac{1}{2}CD$.

又 $AB \parallel CD, CD = 2AB$,

所以 $EF \parallel AB$, 且 $EF = AB$,

所以四边形 ABEF 为平行四边形,

所以 $AF \parallel BE$. (2分)

因为 $AP = AD, PF = DF$, 所以 $AF \perp PD$.

因为 $CP \perp CD, PF = DF$, 所以 $CF = DF = PF$.

又 $AP = AC$, 所以 $\triangle PAF \cong \triangle CAF$,

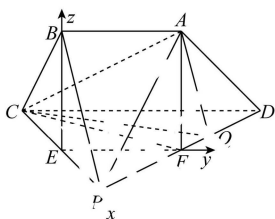
所以 $\angle CFA = \angle PFA = 90^\circ$, 即 $AF \perp CF$.

又 $PD \cap CF = F, PD, CF \subset$ 平面 PCD,

所以 $AF \perp$ 平面 PCD, (3分)

所以 $BE \perp$ 平面 PCD.

又 $BE \subset$ 平面 PBC, 所以平面 PBC \perp 平面 PCD. (4分)



(2) 解: 由(1)知, $BE \perp$ 平面 PCD, 因为 $EF, CP \subset$ 平面 PCD, 所以 $BE \perp EF, BE \perp CP$, 所以 $\angle BEC = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle BEC$ 中, $CE = \frac{1}{2}CP = 1, BC = \sqrt{2}$, 则 $BE =$

$$\sqrt{BC^2 - CE^2} = 1, \text{ 则 } AF = 1. \quad (6 \text{分})$$

因为 $CP \perp CD, EF \parallel CD$, 所以 $EF \perp CP$,

所以 CP, EF, BE 两两垂直.

以 E 为坐标原点, 向量 $\vec{EP}, \vec{EF}, \vec{EB}$ 的方向分别为 x,

y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 1, 1), B(0, 0, 1), P(1, 0, 0), C(-1, 0, 0),$

$D(-1, 2, 0)$,

所以 $\vec{BA} = (0, 1, 0), \vec{BP} = (1, 0, -1), \vec{CA} = (1, 1, 1),$

$\vec{CD} = (0, 2, 0), \vec{DP} = (2, -2, 0)$.

由 $\vec{DQ} = \lambda \vec{DP}, \lambda \in [0, 1]$, 得 $\vec{CQ} = \vec{CD} + \vec{DQ} = \vec{CD} + \lambda \vec{DP} = (0, 2, 0) + \lambda(2, -2, 0) = (2\lambda, 2 - 2\lambda, 0)$. (7分)

设平面 ABP 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m \cdot \vec{BA} = 0, \\ m \cdot \vec{BP} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 - z_1 = 0. \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$, 则 $z_1 = 1$, 得平面 ABP 的一个法向量为 $m = (1, 0, 1)$. (8分)

设平面 ACQ 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \vec{CA} = 0, \\ n \cdot \vec{CQ} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 = 0, \\ 2\lambda x_2 + (2 - 2\lambda)y_2 = 0. \end{cases}$$

取 $x_2 = 1 - \lambda$, 则 $y_2 = -\lambda, z_2 = 2\lambda - 1$, 所以 $n = (1 - \lambda, -\lambda, 2\lambda - 1)$. (10分)

设平面 ABP 与平面 ACQ 的夹角为 θ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \cos \theta &= |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} \\ &= \frac{|1 \times (1 - \lambda) + 0 \times (-\lambda) + 1 \times (2\lambda - 1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \times \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}, \end{aligned}$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$.

故 λ 的值为 $\frac{1}{3}$. (12分)

20. 解: (1) 由题意得 $2a = 2 \times 2b$, 即 $a = 2b$ ①. (2分)

当点 P 为 C 的上顶点或下顶点时, $\triangle ABP$ 的面积取得最大值, 所以 $\frac{1}{2} \times 2b \times a = 8$, 即 $ab = 8$ ②.

联立①②, 得 $a = 4, b = 2$.

故 C 的方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$. (4分)

(2) $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值.

由(1)可得 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 由题意设直线 $l: x = my + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (4m^2 + 1)y^2 + 8my - 12 = 0,$$

则 $\Delta = 64m^2 + 48(4m^2 + 1) > 0$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{8m}{4m^2 + 1}, y_1 y_2 = -\frac{12}{4m^2 + 1}, \quad (6 \text{分})$$

所以 $my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$. (8分)

直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 4$, 得 $y =$

$$\frac{6y_1}{x_1 + 2}, \text{ 即 } D\left(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right).$$

同理可得 $E\left(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2}\right)$. (9分)

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AQE}} = \frac{\frac{1}{2}|AB||y_D|}{\frac{1}{2}|AQ||y_E|} = \frac{4|y_D|}{3|y_E|} = \left| \frac{4y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} \right| =$$

· 理科数学 ·

参考答案及解析

$$\left| \frac{4y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+3)} \right| = 4 \times \left| \frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2} \right| = 4 \times \left| \frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} \right| = 4 \times \left| \frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} \right| = \frac{4}{3},$$

即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值 $\frac{4}{3}$. (12分)

21. 解: (1) $f'(x) = -e^{-x} - a \sin x$,
由题意知当 $x \in [0, \pi]$ 时, $-e^{-x} - a \sin x \leq 0$ 恒成立,
即 $1 + ae^x \sin x \geq 0$ 恒成立.

当 $a \geq 0$ 时, 上式显然成立; (2分)

当 $a < 0$ 时, $e^x \sin x \leq -\frac{1}{a}$.

令 $g(x) = e^x \sin x, x \in [0, \pi]$,

$$\text{则 } g'(x) = (\sin x + \cos x)e^x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)e^x,$$

当 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

所以当 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时, $g(x)$ 取得最大值,

$$\text{即 } g(x)_{\max} = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}. \quad (5 \text{分})$$

故当 $a < 0$ 时, 只需 $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \leq -\frac{1}{a}$, 解得 $-\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \leq a < 0$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}, +\infty)$. (6分)

(2) 由题意得 $e^{-x} + a \cos x + (2-a)(x+1) - 3 \geq 0$ 对任意 $x \in (-\infty, 0]$ 恒成立,

$$\text{令 } k(x) = e^{-x} + a \cos x + (2-a)(x+1) - 3,$$

则 $k(0) = 0$, 且 $k'(x) = -e^{-x} - a \sin x + 2 - a$,

所以需 $k'(0) = 1 - a \leq 0$, 即 $a \geq 1$. (7分)

下面证当 $a \geq 1$ 时, $k(x) \geq 0$ 对任意 $x \in (-\infty, 0]$ 恒成立.

当 $\sin x = -1$, 即 $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ 时,

$$k'(x) = k'\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) = -e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} + 2 < 0; \quad (8 \text{分})$$

当 $\sin x \neq -1$, 即 $x \neq -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ 时,

$$\frac{k'(x)}{\sin x + 1} = \frac{2 - e^{-x}}{\sin x + 1} - a.$$

令 $h(x) = 1 - e^{-x} - \sin x, x \in (-\infty, 0]$,

则 $h'(x) = e^{-x} - \cos x$.

因为 $x \leq 0$, 所以 $-x \geq 0$,

所以 $h'(x) \geq 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增,

所以 $h(x) \leq h(0) = 0$,

所以 $1 - e^{-x} \leq \sin x$, 则 $2 - e^{-x} \leq 1 + \sin x$. (10分)

故当 $x \leq 0$, 且 $x \neq -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ 时, $\frac{2 - e^{-x}}{\sin x + 1} \leq 1$.

又 $a \geq 1$, 所以 $\frac{k'(x)}{\sin x + 1} = \frac{2 - e^{-x}}{\sin x + 1} - a \leq 0$,

所以 $k'(x) \leq 0$.

综上, 当 $x \leq 0$ 时, $k'(x) \leq 0$ 恒成立, 且 $k'(x) = 0$ 的根不连续, 所以 $k(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $k(x) \geq k(0) = 0$.

故实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$. (12分)

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + t \end{cases}$ (t 为参数) 消去参数 t ,

得 $y = 5 - x$,

所以直线 l 的普通方程为 $x + y - 5 = 0$. (3分)

由 $\rho^2 + 4\rho \sin \theta + 12 - a = 0$ 得 $x^2 + y^2 + 4y + 12 - a = 0$, 即 $x^2 + (y + 2)^2 = a - 8$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + (y + 2)^2 = a - 8$.

(5分)

(2) 由(1)知曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + (y + 2)^2 = a - 8$,

因为 $a > 8$, 所以曲线 C 表示圆心为 $(0, -2)$, 半径为 $\sqrt{a - 8}$ 的圆.

要使直线 l 与曲线 C 有公共点, 必须满足:

$$\text{圆心到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|0 - 2 - 5|}{\sqrt{1+1}} \leq \sqrt{a - 8}, \quad (7 \text{分})$$

解得 $a \geq \frac{65}{2}$, 即实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{65}{2}, +\infty\right)$.

(10分)

23. 解: (1) 因为 $f(x) = 2|x + 2| - |x - 5| =$

$$\begin{cases} -x - 9, & x \leq -2, \\ 3x - 1, & -2 < x < 5, \\ x + 9, & x \geq 5, \end{cases} \quad (2 \text{分})$$

所以 $f(x) \geq 4$ 等价于 $\begin{cases} x \leq -2, \\ -x - 9 \geq 4 \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} -2 < x < 5, \\ 3x - 1 \geq 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 5, \\ x + 9 \geq 4, \end{cases}$$

解得 $x \leq -13$ 或 $\frac{5}{3} \leq x < 5$ 或 $x \geq 5$,

所以 $x \leq -13$ 或 $x \geq \frac{5}{3}$, (4分)

所以不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $(-\infty, -13] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$. (5分)

(2) 由(1)可知当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有最小值, 且为 $f(-2) = -7$, (7分)

所以 $f(x) \geq a^2 + 2a - 10$ 恒成立等价于 $-7 \geq a^2 + 2a - 10$ 恒成立,

所以 $a^2 + 2a - 3 \leq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 1$,

即实数 a 的取值范围为 $[-3, 1]$. (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

