★启用前注意保密

2023届大湾区普通高中毕业班联合模拟考试(二)

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、考场号、座位号和准考证号填写在答题卡上，将条形码横贴在答题卡"条形码粘贴处"。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A=\{y\mid y=2^x\}$，$B=\{x\mid y=\log_2(3x-2)\}$，则 $(\complement_R B)\cap A=$

A. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$　　B. $\left[0,\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$

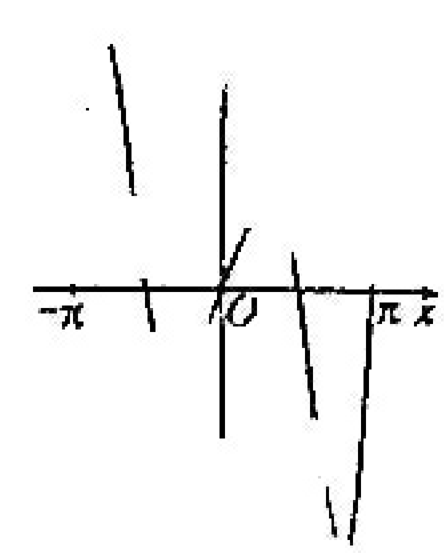
2. 已知i为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

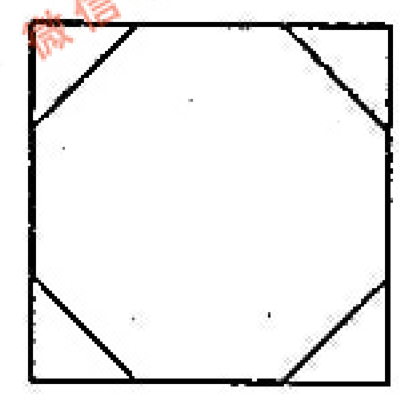
3. 已知函数 $y=f(x)$ 部分图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式可能为

A. $f(x)=x\sin 2x$　　B. $f(x)=x\sin x$

C. $f(x)=2^{|x|}\sin x$　　D. $f(x)=2^{|x|}\sin 2x$



4. 如图，正方形边长为 4，剪去四个角后成为一个正八边形，则可求出此正八边形的外接圆直径 d．根据我国魏晋时期数学家刘徽的“割圆术”思想，如果用此正八边形的周长近似代替其外接圆周长，便可估计 π 的值，据此可知



A． $d=\dfrac{8(\sqrt{2}-1)}{\sin 22.5^\circ}$， $\pi \approx 8\sin 22.5^\circ$

B． $d=\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\sin 22.5^\circ}$， $\pi \approx 4\sin 22.5^\circ$

C． $d=\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\sin 22.5^\circ}$， $\pi \approx 8\sin 22.5^\circ$

D． $d=\dfrac{8(\sqrt{2}-1)}{\sin 22.5^\circ}$， $\pi \approx 4\sin 22.5^\circ$

5． 已知平面向量 $\vec{a}=(-1,1)$， $\vec{b}=(3,1)$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为

A． $(1,0)$

B． $\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10},-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

C． $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$

D． $\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$

6． 已知 $\theta \in (\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，且 $\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$， 则 $\tan\theta=$

A． $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B． $\sqrt{5}$　　C． $\sqrt{10}$　　D． $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$

7． 一堆苹果中大果与小果的比例为 $9:1$，现用一台水果分选机进行筛选．已知这台分选机把大果筛选为小果的概率为 5%，把小果筛选为大果的概率为 2%． 经过一轮筛选后，现在从这台分选机筛选出来的“大果”里面随机抽取一个，则这个“大果”是真的大果的概率为

A． $\dfrac{855}{857}$　　B． $\dfrac{857}{1000}$　　C． $\dfrac{171}{200}$　　D． $\dfrac{9}{10}$

8． 已知某圆锥的内切球（球与圆锥侧面、底面均相切）的体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$，则该圆锥表面积的最小值为

A． 32π　　B． 28π　　C． 24π　　D． 20π

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称

C. 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增

D. 若 $-\dfrac{\pi}{24}\le x<\dfrac{\pi}{12}$，则 $f(x)\ge 1$

10. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，定义函数 $f(x)$ 为 X 取值不超过 x 的概率，即 $f(x)=P(X\le x)$. 若 $x>0$，则

A. $f(-x)=1-f(x)$

B. $f(2x)=2f(x)$

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

D. $P(|X|\le x)=2f(x)-1$

11. 已知函数 $f(x)=e^x+e^{\frac{1}{x}}$，则

A. $f(x)=f(-x)$

B. $f(x)$ 的最小值为 $2e$

C. $f(x)f(-x)$ 的最小值为 4

D. $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递增

12. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，P 为双曲线右支上异于顶点的一点，ΔPF_1F_2 的内切圆记为圆 I，圆 I 的半径为 r，过 F_1 作 PI 的垂线，交 PI 的延长线于 Q，则

A. 动点 I 的轨迹方程为 $x=4(y\ne 0)$

B. r 的取值范围为 $(0,3)$

C. 若 $r=1$，则 $\tan\angle F_1PF_2=\dfrac{20}{9}$

D. 动点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=16\left(x\ne 4 \text{且} x>-\dfrac{16}{5}\right)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

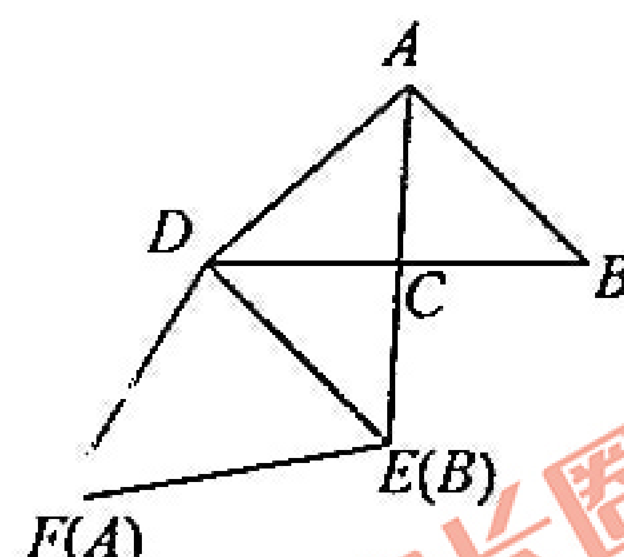
13．若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}>a_n$且$S_{n+1}<S_n$，其中S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和.请写出一个满足上述条件的数列通项$a_n=$______.

14．某地铁换乘站设有编号为m_1，m_2，m_3，m_4的四个安全出口，若同时开放其中的两个安全出口，疏散 1000 名乘客所需时间如下表：

安全出口编号	m_1，m_2	m_2，m_3	m_3，m_4	m_1，m_3
疏散乘客用时（秒）	120	140	190	160

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号为______.

15．如图为三棱锥$A-BCD$的平面展开图，其中$AC=CD=CB=2$，$AE\perp BD$，垂足为C，则该三棱锥的体积为______.



16．设随机变量T满足$P(T=i)=\dfrac{1}{3}$，$i=1, 2, 3$，直线$y=x+T$与抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的公共点个数为η，若$E(\eta)=\dfrac{5}{3}$，则$p=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且$a_1=1$，$b_2=a_2$，$b_3=a_5$，$b_4=a_{14}$.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）$\forall n\in N^*$，数列$\{c_n\}$满足$\dfrac{c_1}{b_2}+\dfrac{c_2}{b_3}+\cdots+\dfrac{c_n}{b_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{3}$，求$\{c_n\}$的前$n$项和$S_n$.

18. （12 分）

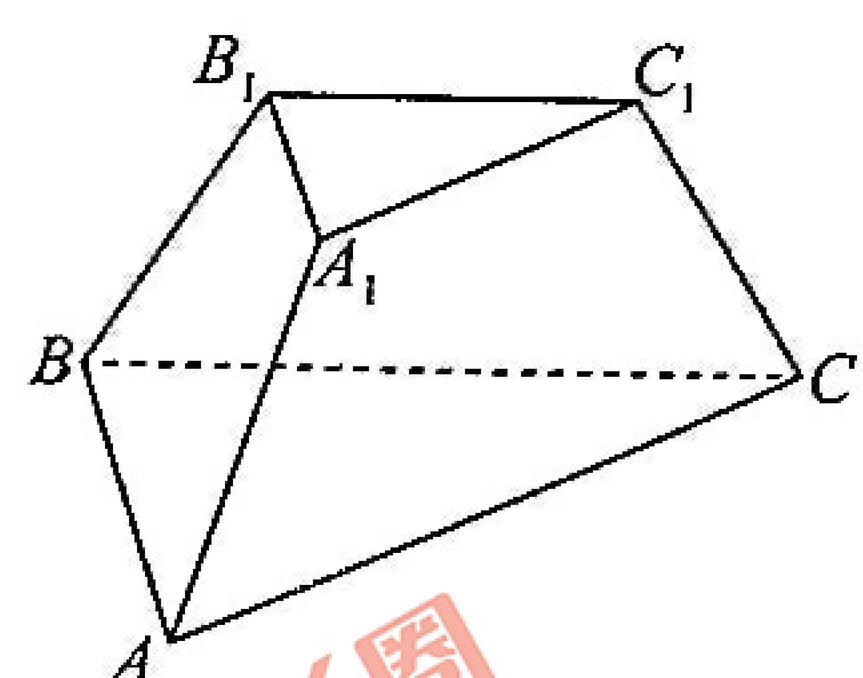
在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．点 D 为 BC 边的中点，已知 $c=2\sqrt{5}$，$2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\dfrac{\sqrt{5}}{2}b\sin C$，$\cos\angle CAD=\dfrac{3}{8}$．

（1）求 b；

（2）求 ΔABC 的面积．

19. （12 分）

如图，在三棱台 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，$BB_1=B_1C_1=C_1C=\dfrac{1}{2}BC=2$，$AB\perp BC$，平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 BB_1C_1C．



（1）证明：$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C；

（2）若二面角 $B-C_1C-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$，求 AB 的长．

20. （12 分）

某工厂车间有 6 台相同型号的机器，各台机器相互独立工作，工作时发生故障的概率都是 $\dfrac{1}{4}$，且一台机器的故障能由一个维修工处理．已知此厂共有甲，乙，丙 3 名维修工，现有两种配备方案，方案一：由甲，乙，丙三人维护，每人负责 2 台机器；方案二：由甲乙两人共同维护 6 台机器．

（1）对于方案一，设 X 为甲维护的机器同一时刻发生故障的台数，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$；

（2）在两种方案下，分别计算机器发生故障时不能得到及时维修的概率，并以此为依据来判断，哪种方案能使工厂的生产效率更高？

21. （12 分）

已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$， P 为圆上动点，点 F 坐标为 $(1,0)$，连 OP， FP．过点 P 作直线 FP 的垂线 l，线段 FP 的中垂线交 OP 于点 M，直线 FM 交 l 于点 A．

（1）求点 A 的轨迹方程；

（2）记点 A 的轨迹为曲线 C，过点 $G(4,0)$ 作斜率不为 0 的直线 n 交曲线 C 于不同两点 S，R，直线 $x=1$ 与直线 n 交于点 H，记 $\lambda=\dfrac{S_{\Delta HFR}}{S_{\Delta HFS}}$，$\mu=\dfrac{S_{\Delta GFS}}{S_{\Delta GFR}}$，问：$\lambda\cdot\mu$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由．

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x-2}}-\ln x-a$，其中 a 为常数，$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）当 $a>1$ 时，问 $f(x)$ 有几个零点，请说明理由．