数学

一.单项选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	C	C	A	A	B

二.多项选择题：

9	10	11	12
BD	BC	ACD	BC

三.填空题：

13. $-\dfrac{1}{2}$；　　14. $\sqrt{7}$；

15. $x^2=-80y$，$\dfrac{140}{13}$；　　16.乙

四.解答题：

17.(本小题满分 10 分)

解：(I)选①由余弦定理得：$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，又 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，

所以 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2bc\cos A$，……3 分

得 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.……5 分

选②，因为 $\dfrac{a+b}{\sin C}=\dfrac{c-b}{\sin A-\sin B}$，由正弦定理得：$\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{c-b}{a-b}$，

整理得：$b^2+c^2-a^2=bc$，……3 分

由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.……5 分

选③，因为 $\sqrt{3}\sin C+\cos C=\dfrac{c+b}{a}$，由正弦定理得：$\sqrt{3}\sin C+\cos C=\dfrac{\sin C+\sin B}{\sin A}$，

即 $\sqrt{3}\sin C\sin A+\cos C\sin A=\sin C+\sin B$，……2 分

又因为 $A+C=\pi-B$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

所以 $\sqrt{3}\sin C\sin A-\sin C\cos A=\sin C$，因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，……………………………………………4 分

因为 $0<A<\pi$ 所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$ 所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.……………………………………………………………5 分

(II)法一：在△ACD 中，设∠$ADC=\theta$ $\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{AD}{\sin(120°-\theta)}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，

$\therefore AC=4\sin\theta, AD=4\sin(120°-\theta)$ ，……………………………………………7 分

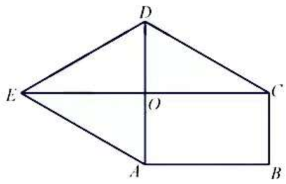
$\therefore b+c=4\sin\theta+8\sin(120°-\theta)=8\sin\theta+4\sqrt{3}\cos\theta=4\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)\le4\sqrt{7}$ ，…9 分

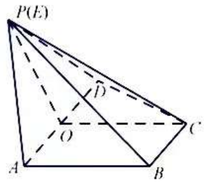
$(\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2})$，当 $\theta+\varphi=90°$ 时取等号，

所以 $b+c$ 的最大值是 $4\sqrt{7}$.……………………………………………………………10 分

18.(本小题满分 12 分)

解析：(I)证明：在平面图形中取 AD 中点 O，连接 OC,OE，∵△ADE 是边长为 2 的等边三角形，





$\therefore OE\perp AD$，$OD=1$，

故翻折后有 $OP\perp AD$，……1 分

又∵△CD∥AE， $\therefore \angle CDO=\angle DAE=\frac{\pi}{3}$，

∵$CD=AE=2$,

$\therefore OC\perp AD$，…………………………3 分

且 $OP\cap OC=O$，

$OP,OC\subset$平面POC，$\therefore AD\perp$平面POC，…………………4 分

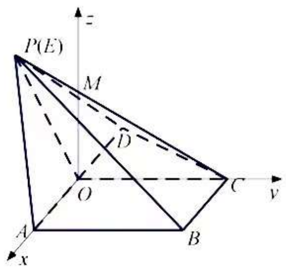
∵$\angle BAD=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ $\therefore AD//BC$，$\therefore BC\perp$平面POC，……………………5 分

又∵$PC\subset$平面 POC，$\therefore BC\perp PC$.……………………………………………………6 分

(II)解：在平面 POC 内作 $OM\perp OC$，交 PC 于 M，

∵$AD\perp$平面 POC，…………………………………………7 分

以 O 为原点，OA 为 x 轴，OC 为 y 轴，OM 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



由(I)得，四边形 $OABC$ 为矩形，

在△POC 中，$OC=OP=\sqrt{3}$，

$PC=3$，由余弦定理得 $\cos\angle POC=-\frac{1}{2}$

$\therefore \angle POC=\frac{2\pi}{3}$，………………………………8 分

所以各点坐标为 $A(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$，

设平面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{3}{2}z=0,\\ x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

设 $y=1$，则 $z=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，……………………………………………………………10 分

设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\dfrac{-\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}}\cdot\sqrt{3+1+3}}|=\dfrac{\sqrt{210}}{70}$.……………………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

解析：(I)由 $2^{2n}\cdot a_n^2=1+2^{2n-2}\cdot a_{n-1}^2(n\geq 2)$ 得，$2^{2n}\cdot a_n^2-2^{2n-2}\cdot a_{n-1}^2=1$，

令 $b_n=2^{2n}\cdot a_n^2$，则 $b_n-b_{n-1}=1$，$n\geq 2$……………………………………………2 分

$\therefore\{b_n\}$ 为首项为1，公差为1的等差数列，

$\therefore 2^{2n}\cdot a_n^2=1+(n-1)\times 1=n$，…………………………………………………………4 分

$a_n>0$，得 $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.……………………………………………………………………6 分

(II) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\dfrac{\sqrt{i+1}}{2^{i+1}})=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2^2})+(\dfrac{\sqrt{2}}{2^2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2^3})+\cdots+(\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

……………………………………………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（I）X_3 可取值为 1，2，3，

$P(X_3=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，$P(X_3=2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{18}$，

$P(X_3=3)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{18}=\dfrac{7}{18}$，…………………………………………………………3 分

因此 X_3 的分布列为

X_3	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

……………………………………………………………………4 分

（II）（i）Y_n 可取值为 $1,2,\cdots,n$，

每位同学两题都答对的概率为 $p=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

所以答题失败的概率均为：$1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，

$Y_n=k(1\le k\le n-1,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$P(Y_n=k)=(\frac{2}{3})^{k-1}\times\frac{1}{3}$.……………………………………………………6 分

当 $Y_n=n$ 时，

$P\left(Y_n=n\right)=(\frac{2}{3})^{n-1}$.……………………………………………………7 分

Y_n 的分布列为：

Y_n	1	2	3	…	$n-1$	n
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}$	…	$(\frac{2}{3})^{n-2}\times\frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^{n-1}$

……………………………………………………8 分

（ii）

$E\left(Y_n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}k(\frac{2}{3})^{k-1}\times\frac{1}{3}+n(\frac{2}{3})^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*,n\ge 2)$.……………………………………9 分

$E\left(Y_{n+1}\right)-E\left(Y_n\right)=n(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3}+(n+1)(\frac{2}{3})^{n}-n(\frac{2}{3})^{n-1}=(\frac{2}{3})^{n}>0$，

故 $E\left(Y_n\right)$ 单调递增；……………………………………………………10 分

求得 $E\left(Y_2\right)=\frac{5}{3}$，

故 $E\left(Y_n\right)=E\left(Y_2\right)+\left[E\left(Y_3\right)-E\left(Y_2\right)\right]+\left[E\left(Y_4\right)-E\left(Y_3\right)\right]+\cdots+\left[E\left(Y_n\right)-E\left(Y_{n-1}\right)\right]$，

$\therefore E(Y_n)=\frac{5}{3}+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{5}{3}+\frac{(\frac{2}{3})^2[1-(\frac{2}{3})^{n-2}]}{1-\frac{2}{3}}=3-2\times(\frac{2}{3})^{n-1}<3$，

故 $E\left(Y_2\right)<E\left(Y_3\right)<E\left(Y_4\right)<E\left(Y_5\right)<\cdots<E\left(Y_n\right)<3$.……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（I）直线 l 与双曲线 C 相切．理由如下：

联立方程组 $\begin{cases}ax^2-by^2=1\\ax_0x-by_0y=1\end{cases}$，

$\therefore\left(aby_0{}^2-a^2x_0{}^2\right)x^2+2ax_0x-1-by_0{}^2=0$，……………………………………1 分

$\because N\in C,\therefore ax_0^2-by_0^2=1,\therefore -ax^2+2ax_0x-ax_0^2=0$，

$\therefore \Delta=4a^2x_0^2-4a^2x_0^2=0$，$\therefore$直线$l$与双曲线$C$相切．……………………………3 分

（II）证明：由（I）知 $\left(aby_0^2-a^2x_0^2\right)x^2+2ax_0x-1-by_0^2=0$，

$\because$直线l与双曲线C的一支有 2 个交点，则$\begin{cases} aby_0^2-a^2x_0^2\neq 0 \\ \Delta>0 \\ \dfrac{-1-by_0^2}{aby_0^2-a^2x_0^2}>0 \end{cases}$，……………………5 分

$\therefore \triangle=4a^2x_0^2-4a(by_0^2-ax_0^2)(-1-by_0^2)$

$=4aby_0^2(1+by_0^2-ax_0^2)$

$\therefore ax_0^2-by_0^2<1$，

$\because \dfrac{-1-by_0^2}{aby_0^2-a^2x_0^2}=\dfrac{1+by_0^2}{a(ax_0^2-by_0^2)}>0$，

$\therefore 0<ax_0^2-by_0^2<1$，……………………………………………………………………7 分

$\therefore N(x_0,\ y_0)\in Q$．………………………………………………………………………8 分

（III）设$M(x_1,\ y_1)$，$A(x,\ y)$，设$\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{BN}$，

$\because N(x_0,\ y_0)\notin l$，$\therefore \lambda\neq -1$，则

$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_0}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_0}{1+\lambda} \end{cases}$，…………………………………………………………………………9 分

代入双曲线C：$ax^2-by^2=1$，利用M在l上，

即$ax_0x_1-by_0y_1=1$，整理得

$\left(ax_0^2-by_0^2-1\right)\lambda^2+ax_1^2-by_1^2-1=0$，……………………………………………10 分

同理得关于μ的方程$\left(ax_0^2-by_0^2-1\right)\mu^2+ax_1^2-by_1^2-1=0$．

即λ、μ是$\left(ax_0^2-by_0^2-1\right)t^2+ax_1^2-by_1^2-1=0$的两根，…………………………11 分

$\therefore \lambda+\mu=0$，$\therefore \dfrac{|MA|}{|AN|}=\dfrac{|MB|}{|BN|}$．………………………………………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：（I）$\because f(x)=2ae^{-x}-\sin x+1 \therefore f'(x)=-2ae^{-x}-\cos x$．

$\because f'(0)=0$，$\therefore f'(0)=-2a-1=0$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………2 分

$\therefore f(x)=-e^{-x}-\sin x+1$，$f'(x)=e^{-x}-\cos x=e^{-x}(1-e^{x}\cos x)$，

当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1\geq\cos x$，$\therefore f'(x)>0$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，令 $g(x)=1-e^{x}\cos x$，

$\because g'(x)=e^{x}(\sin x-\cos x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 单调递减，$\therefore g(x)<g(0)=0$，

$\therefore f'(x)<0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极大值；……………………………4 分

(II) $f(x)=-e^{-x}-\sin x+1=e^{-x}[e^{x}(1-\sin x)-1]$，

令 $h(x)=e^{x}(1-\sin x)-1$，……………………………………………………………………5 分

则 $h'(x)=e^{x}(1-\sin x-\cos x)=e^{x}[1-\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})]$，……………………………7 分

当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2})(k\in\mathbf{N})$ 时，$\sin(x+\dfrac{\pi}{4})>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in\mathbf{N})$ 单调递减，……………………………………9 分

又 $\because h(2k\pi)=e^{2k\pi}-1\geq0$，$h(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=-1<0$，

$\therefore h(x)$ 在每一个区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in\mathbf{N})$ 有唯一零点，…………………………11 分

故 $f\left(x\right)$ 在每一个区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in\mathbf{N})$ 有唯一零点. …………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。