

2023 届南宁市第二中学考前模拟大演练

数 学 (理 科)

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

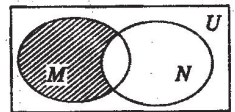
一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分。在每小题给出的四个选项中, 有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于 x 轴对称, 且 $z_1 = 1 + i$, 则复数 $\frac{z_2}{z_1} =$

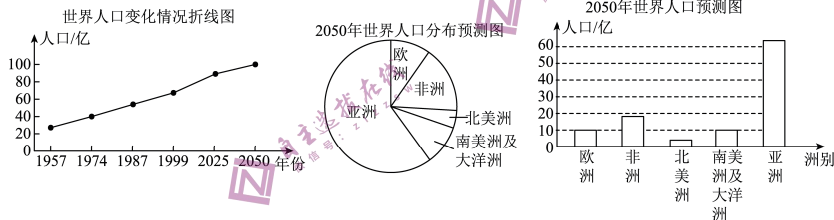
- A. 1 B. -1 C. i D. -i

2. 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$, $M = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, 则图中阴影部分表示的集合为

- A. $\{-2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{-3, 2\}$ D. $\{-2, 3\}$



3. 如图所示是世界人口变化情况的三幅统计图: 下列结论中错误的是



- 从折线图能看出世界人口的总量随着年份的增加而增加
 - 2050年亚洲人口比其他各洲人口的总和还要多
 - 2050年南美洲及大洋洲人口之和与欧洲人口基本持平
 - 1957年到2050年各洲中北美洲人口增长速度最慢
4. 某几何体的正视图和侧视图都是边长为1的正方形, 且体积为 $\frac{1}{2}$, 则该几何体的俯视图可以是

- A. B. C. D.

5. 已知函数 $f(x)$ 同时满足性质: ① $f(-x) = f(x)$; ② 当 $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 可能为

- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $f(x) = \cos 2x$ D. $f(x) = \ln|x|$

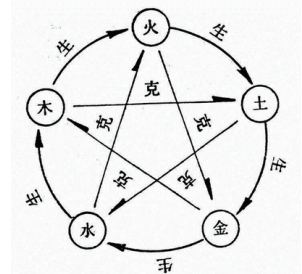
6. 已知一组样本数据共有9个数，其平均数为8，方差为12，将这组样本数据增加一个数据后，所得新的样本数据的平均数为9，则新的样本数据的方差为

- A. 18.2 B. 19.6 C. 19.8 D. 21.4

7. 已知 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ ，则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$

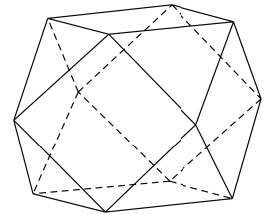
- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 五行是华夏民族创造的哲学思想。多用于哲学、中医学和占卜方面。五行学说是华夏文明重要组成部分。古代先民认为，天下万物皆由五类元素组成，分别是金、木、水、火、土，彼此之间存在相生相克的关系。五行是指木、火、土、金、水五种物质的运动变化。所以，在中国，“五行”有悠久的历史渊源。下图是五行图，现有4种颜色可供选择给五“行”涂色，要求五行相生不能用同一种颜色（例如木生火，木与火不能同色，水生木，水与木不能同色）五行相克可以用同一种颜色（例如火与水相克可以用同一种颜色），则不同的涂色方法种数有



- A. 30 B. 120 C. 150 D. 240

9. 在《最强大脑》的节目中，作为脑力角逐的考题，阿基米德多面体成为了难倒一众天才的“元凶”，因此“一夜爆红”。“阿基米德多面体”也称半正多面体，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，它体现了数学的对称美。例如足球一般是有12个正五边形和20个正六边形构成的阿基米德多面体。如图是以一正方体的各条棱的中点为顶点的多面体，这是一个有八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，若该多面体的棱长为1，则经过该多面体的各个顶点的球的表面积为



- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. 2π C. 4π D. 8π

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为椭圆 C 上一点， $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ， F_2 点到直线 PF_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

11. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c ， D 是 AB 上的三等分点（靠近点 A ）且 $CD=1$ ， $(a-b)\sin A = (c+b)(\sin C - \sin B)$ ，则 $a+2b$ 的最大值是

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

12. 对于任意的 $y \in [1, e]$ ，关于 x 的方程 $x^2 ye^{1-x} = ay + \ln y$ 在 $x \in [-1, 4]$ 上有三个根，则实数 a 的取值范围是

- A. $\left[\frac{16}{e^3}, \frac{3}{e}\right)$ B. $\left(0, \frac{16}{e^3}\right]$ C. $\left[\frac{16}{e^3}, e^2 - \frac{3}{e}\right]$ D. $\left[\frac{16}{e^3}, e^2 - \frac{1}{e}\right)$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 120$ ，则 $2a_6 - a_9 =$ _____.

14. 已知向量 a, b 夹角为 60° ，且 $|a| = 1, |2a - b| = 2\sqrt{3}$ ，则 $|b| =$ _____.

15. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， O 为底面 $ABCD$ 的中心， M 为线段 CC_1 上的动点（不与两个端点重合）， P 为线段 BM 的中点，则以下正确的是 _____.

- (1). 直线 DP 与 OM 是异面直线 (2). 三棱锥 $B_1 - DBM$ 的体积是定值
 (3). 存在点 M ，使 $AC_1 \parallel$ 平面 BDM (4). 存在点 M ，使 $A_1C \perp$ 平面 BDM

16. 已知点 $A(4,0)$ ，点 P 在抛物线 $\Gamma: y^2 = 8x$ 上运动， F 是抛物线 Γ 的焦点，连接 PF 并延长与圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 交于点 B ，则 $\frac{|PA|^2}{|PB|}$ 的最小值是 _____.

三、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

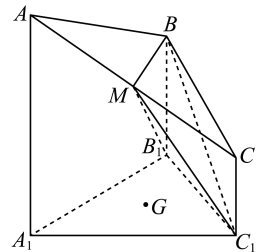
17. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_4 = 4$ ， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_{10} = 55$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \dots + \log_2 b_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；
 (II) 求数列 $\{(-1)^n a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图在多面体 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ， $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形， $A_1B_1 = BB_1 = 2$ ， $AA_1 = 3$ ， $CC_1 = 1$ ，点 M 是 AC 的中点.



- (1) 若点 G 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心，证明：点 G 在平面 BB_1M 内；
 (2) 求二面角 $B_1 - BM - C_1$ 的正切值.

19. (本小题满分 12 分)

为响应党中央“扶贫攻坚”的号召，某企业指导一贫困村通过种植紫甘薯并通过网络直播来提高经济收入。紫甘薯对环境温度要求较高，根据科学种植经验，随着温度的升高，其死亡株数成增长的趋势。下表给出了一号实验田紫甘薯在温度升高时 6 组死亡的株数.

温度 $x / ^\circ\text{C}$	21	23	24	27	29	30
死亡数 $y /$ 株	6	11	20	27	57	77

经计算， $\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 26$ ， $\bar{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i = 33$ ， $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 588$ ， $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 84$ ， $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = 3930$ ， $\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 393$ ， $e^{8.071} \approx 3200$ ，其中 x_i ， y_i 分别为试验数据中的温度和死亡株数， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- (1) 若用一元线性回归模型，求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；
 (2) 若用非线性回归模型求得 y 关于 x 的非线性经验回归方程 $\hat{y} = 0.06e^{0.2306x}$ ，且相关指

数为 $R^2 = 0.9432$.

(i) 试与 (1) 中的回归模型相比, 用 R^2 说明哪种模型的拟合效果更好;

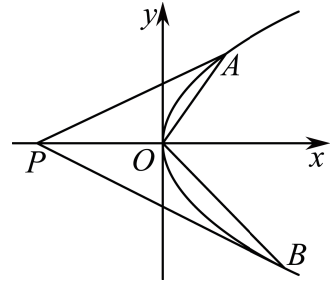
(ii) 用拟合效果好的模型预测温度为 35°C 时该批紫甘薯的死亡株数 (结果取整数) .

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二

乘估计分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$; 相关指数为: $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$.

20. (本小题满分 12 分)

抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点 $M(1, y_0)$ 到抛物线 C 的焦点 F 的距离为 2, A 、 B (不与 O 重合) 是抛物线 C 上两个动点, 且 $OA \perp OB$.



(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) x 轴上是否存在点 P 使得 $\angle APB = 2\angle APO$? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 说明理由 .

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = kx + 1 (k \in R)$.

(1) 若直线 $y = g(x)$ 和函数 $y = f(x)$ 的图象相切, 求 k 的值;

(2) 当 $k > 0$ 时, 若存在正实数 m , 使对任意 $x \in (0, m)$ 都有 $|f(x) - g(x)| > 2x$ 恒成立, 求 k 的取值范围 .

请考点在第 22、23 两题中任选一题作答, “并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)【选修: 4-4 坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程; (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分)【选修: 4-5 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x+2| - m|x+1|$.

(1) 若 $m = -2$, 求不等式 $f(x) \geq 8$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq m|x+3|$ 对于任意实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围 .