

福建省 2023 届高中毕业班适应性练习卷

数学

注意事项：

1. 答题前，学生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名。学生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与学生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。
3. 答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

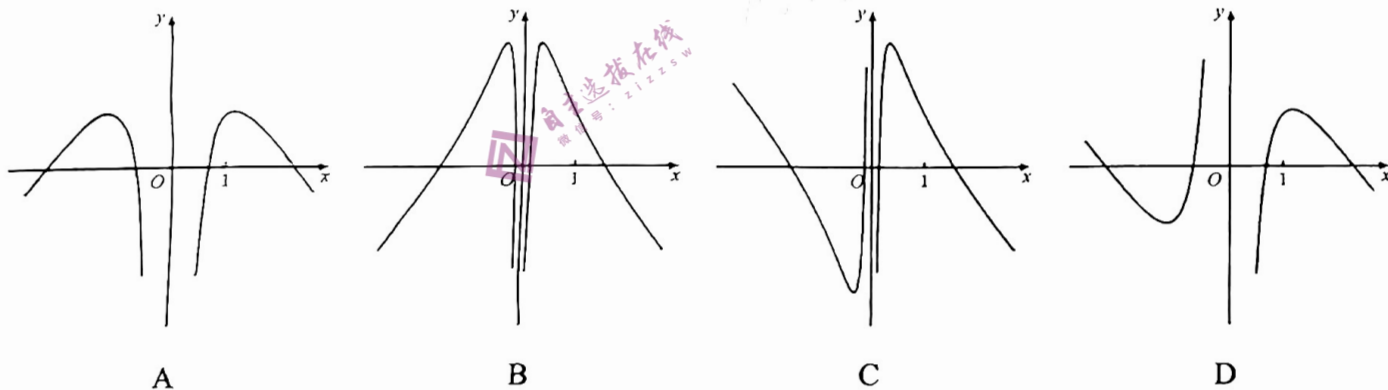
1. 已知集合 $A = \{x | y = \lg x\}$ ， $B = \{y | y = x^2\}$ ，则

- A. $A \cup B = \mathbb{R}$ B. $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \subseteq B$

2. 已知 z 是方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的一个根，则 $|z| =$

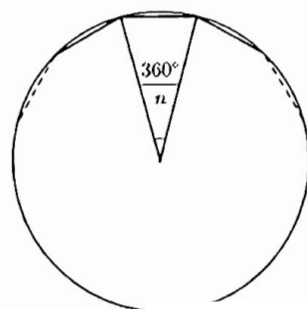
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

3. 函数 $f(x) = \frac{\ln|x| - x^2 + 2}{x}$ 的图象大致为



4. 中国古代数学专著《九章算术》的第一章“方田”中载有“半周半径相乘得积步”，其大意为：圆的半周长乘以其半径等于圆面积。南北朝时期杰出的数学家祖冲之曾用圆内接正多边形的面积“替代”圆的面积，并通过增加圆内接正多边形的边数 n 使得正多边形的面积更接近圆的面积，从而更为“精确”地估计圆周率 π 。据此，当 n 足够大时，可以得到 π 与 n 的关系为

- A. $\pi \approx \frac{n}{2} \sin \frac{360}{n}$ B. $\pi \approx n \sin \frac{180}{n}$
- C. $\pi \approx n \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{360}{n} \right)}$ D. $\pi \approx \frac{n}{2} \sqrt{1 - \cos \frac{180}{n}}$



5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{5}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , F_2 关于 C 的一条渐近线的对称点为 P . 若 $|PF_1| = 2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为
- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 4

6. 中国救援力量在国际自然灾害中为拯救生命作出了重要贡献, 很好地展示了国家形象、增进了国际友谊, 多次为祖国赢得了荣誉. 现有 5 支救援队前往 A、B、C 等 3 个受灾点执行救援任务, 若每支救援队只能去其中的一个受灾点, 且每个受灾点至少安排 1 支救援队, 其中甲救援队只能去 B、C 两个受灾点中的一个, 则不同的安排方法数是

A. 72 B. 84 C. 88 D. 100

7. 已知 $a = \ln 2$, $b = e - \frac{1}{a}$, $c = 2^a - a$, 则

A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

8. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$. 今有一批数量庞大的零件, 假设这批零件的某项质量指标 ξ (单位:

毫米) 服从正态分布 $N(5.40, 0.05^2)$, 现从中随机抽取 N 个, 这 N 个零件中恰有 K 个的质量指标 ξ 位于

区间 $(5.35, 5.55)$. 若 $K = 45$, 试以使得 $P(K = 45)$ 最大的 N 值作为 N 的估计值, 则 N 为

A. 45 B. 53 C. 54 D. 90

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 2)$, 则

A. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

B. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

C. $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 在 \mathbf{a} 上的投影向量是 $-\mathbf{a}$

D. \mathbf{a} 在 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 上的投影向量是 $(-3, 4)$

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 满足: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, 则

A. 曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 对称

B. 函数 $y = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 是奇函数

C. 函数 $y = f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ 单调递减

D. 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$

11. 已知抛物线 C 的焦点为 F , 准线为 l , 点 P 在 C 上, PQ 垂直 l 于点 Q , 直线 QF 与 C 相交于 M, N 两点. 若 M 为 QF 的三等分点, 则

A. $\cos \angle PQM = \frac{1}{2}$

B. $\sin \angle QPM = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

C. $NF = QF$

D. $PN = \sqrt{3}PQ$

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, M 为侧面 AA_1D_1D 上的点, N 为侧面 CC_1D_1D 上的点, 则下列判断正确的是

A. 若 $BM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 M 到直线 A_1D 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. 若 $B_1N \perp AC_1$, 则 $N \in CD_1$, 且直线 $B_1N \parallel$ 平面 A_1BD

C. 若 $M \in A_1D$, 则 B_1M 与平面 A_1BD 所成角正弦的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 若 $M \in A_1D, N \in CD_1$, 则 M, N 两点之间距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

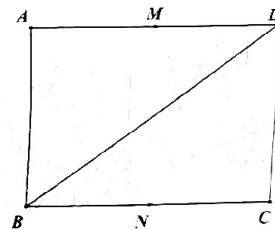
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 其中第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分。

13. 写出过点 $(2,0)$ 且被圆 $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}$ 的一条直线的方程_____.

14. 已知 $\{a_n\}$ 是单调递增的等比数列, $a_4 + a_5 = 24$, $a_3 a_6 = 128$, 则公比 q 的值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} - 1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \ln(x+1), & x > 0. \end{cases}$ 若 $x(f(x) - a|x|) \leq 0$, 则 a 的取值范围是_____.

16. 如图, 一张 A4 纸的长 $AD = 2\sqrt{2}a$, 宽 $AB = 2a$, M, N 分别是 AD, BC 的中点. 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 得到以 A, B, C, D 为顶点的三棱锥, 则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球 O 的半径为_____; 在翻折的过程中, 直线 MN 被球 O 截得的线段长的取值范围是_____.



四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b = 2c \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $c = 1$, D 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上的点, $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \overline{BA}^2$, 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

18. (12 分)

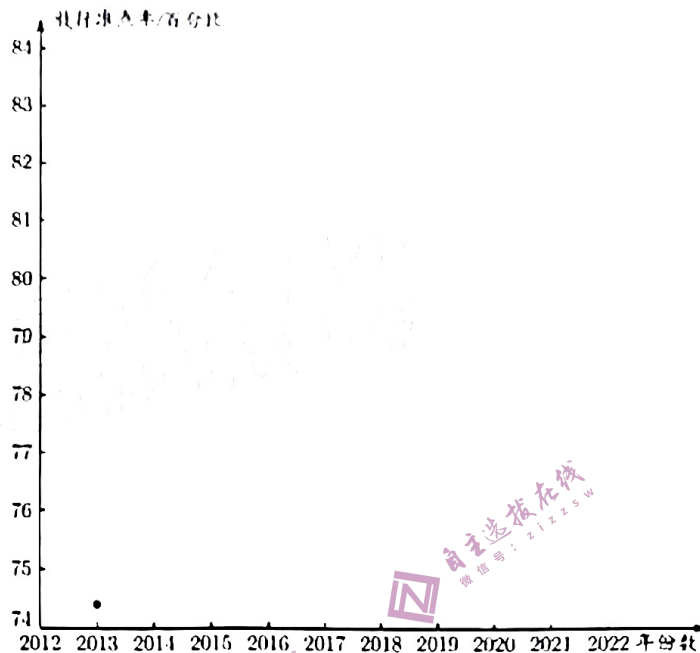
已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_2 = 8, a_{2n-1} + a_{2n+1} = \log_2 a_{2n}, a_{2n} a_{2n+2} = 16^{a_{2n+1}}$

(1) 证明: $\{a_{n-1}\}$ 是等差数列;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n > 2023$, 求 n 的最小值.

19. (12分)

放行准点率是衡量机场运行效率和服务质量的重要指标之一。某机场自2012年起采取相关策略优化各个服务环节，运行效率不断提升。以下是根据近10年年份数 x_i 与该机场飞往A地航班放行准点率 y_i ($i=1,2,\dots,10$) (单位: 百分比) 的统计数据所作的散点图及经过初步处理后得到的一些统计量的值。



\bar{x}	\bar{y}	s	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{10} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} t_i y_i$
2017.5	80.4	1.5	40703145.0	1621254.2	27.7	1226.8

其中 $t_i = \ln(x_i - 2012)$, $\bar{t} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_i$.

(1) 根据散点图判断, $y = bx + a$ 与 $y = c \ln(x - 2012) + d$ 哪一个适宜作为该机场飞往A地航班放行准点率 y 关于年份数 x 的经验回归方程类型(给出判断即可, 不必说明理由), 并根据表中数据建立经验回归方程, 由此预测2023年该机场飞往A地的航班放行准点率。

(2) 已知2023年该机场飞往A地、B地和其他地区的航班比例分别为0.2、0.2和0.6。若以(1)中的预测值作为2023年该机场飞往A地航班放行准点率的估计值, 且2023年该机场飞往B地及其他地区(不包含A、B两地)航班放行准点率的估计值分别为80%和75%, 试解决以下问题:

(i) 现从2023年在该机场起飞的航班中随机抽取一个, 求该航班准点放行的概率;

(ii) 若2023年某航班在该机场准点放行, 判断该航班飞往A地、B地、其他地区等三种情况中的哪种情况的可能性最大, 说明你的理由。

注: (1) 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计

$$\text{分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u};$$

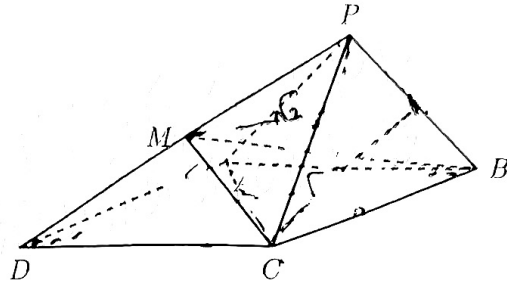
(2) 参考数据: $\ln 10 \approx 2.30$, $\ln 11 \approx 2.40$, $\ln 12 \approx 2.48$.

20. (12分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = PC = 2$, $PA = PB = \sqrt{2}$. M 是棱 PD 上的点, 且四面体 $MPBC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(1) 证明: $PM = MD$;

(2) 若过点 C, M 的平面 α 与 BD 平行, 且交 PA 于点 Q , 求平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.



21. (12分)

已知圆 $A_1: (x+1)^2 + y^2 = 16$, 直线 l_1 过点 $A_2(1,0)$ 且与圆 A_1 交于点 B, C , BC 中点为 D , 过 A_2C 中点 E 且平行于 A_1D 的直线交 A_1C 于点 P , 记 P 的轨迹为 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 坐标原点 O 关于 A_1, A_2 的对称点分别为 B_1, B_2 , 点 A_1, A_2 关于直线 $y=x$ 的对称点分别为 C_1, C_2 , 过 A_1 的直线 l_2 与 Γ 交于点 M, N , 直线 B_1M, B_2N 相交于点 Q . 请从下列结论中, 选择一个正确的结论并给予证明.

① $\triangle QB_1C_1$ 的面积是定值; ② $\triangle QB_1B_2$ 的面积是定值; ③ $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (x+a)e^x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的单调性;

(2) 是否存在 a, x_0, x_1 , 且 $x_0 \neq x_1$, 使得曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 处有相同的切线? 证明你的结论.

论.