

河南省 2024 届高三起点考试

数 学 试 卷

2023. 8. 27

本试卷共 4 页, 22 小题, 满分 150 分。考试用时 120 分钟

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卡指定位置, 认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色墨水的签字笔直接答在答题卡上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卡指定区域外无效。
4. 考试结束, 监考人员将答题卡收回, 考生自己保管好试题卷, 评讲时带来。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $(1+i) \cdot z = -2+i$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \log_2(x-1) < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于
A. $\{x \mid -2 < x < 4\}$ B. $\{x \mid 1 < x < 4\}$
C. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3\}$
3. 已知 α, β 是两个不同的平面, m 为平面 α 内的一条直线, 下列说法正确的是
A. 若 $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $l \subset \beta, m \parallel l$, 则 $m \parallel \beta$
C. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \beta$ D. 若 $m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
4. 新高考按照“3+1+2”的模式设置, 其中“3”为语文、数学、外语 3 门必考科目, “1”由考生在物理、历史 2 门科目中选考 1 门科目, “2”由考生在化学、生物、政治、地理 4 门科目中选考 2 门科目, 若学生甲、乙随机选择自己的选考科目, 则甲、乙选考的三门科目均不相同的概率为
A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

5. 已知 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x + a \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x + b \leq 0\}$, 甲: $a = b$, 乙: $A = B$, 则
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 C. 甲是乙的充要条件
 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
6. 设不为 1 的实数 a, b, c 满足: $a > b > c > 0$, 则
- A. $\log_c b > \log_a b$ B. $a^{1/b} = b^{1/a}$ C. $b^a > b^c$ D. $\log_a b > \log_a c$
7. 已知过坐标原点的直线 l 与圆 $C: (x-6)^2 + (y+8)^2 = 125$ 相交于 M, N 两点, 当线段 MN 的长为整数时, 所有满足条件直线的条数为
- A. 12 B. 13 C. 25 D. 26
8. 已知函数 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$ (e 为自然对数的底数), 则函数 $f(x) = g[g(x)] - \frac{1}{9}g(x) - 1$ 的零点个数为
- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 学校“未来杯”足球比赛中, 甲班每场比赛平均失球数是 1.9, 失球个数的标准差为 0.3; 乙班每场比赛平均失球数是 1.3, 失球个数的标准差为 1.2, 你认为下列说法中正确的是
- A. 平均来说乙班比甲班防守技术好
 B. 乙班比甲班防守技术更稳定
 C. 乙班在防守中有时表现非常好, 有时表现比较差
 D. 甲班不怎么失球
10. 下列函数中既是奇函数又是增函数为
- A. $y = -\frac{1}{x}$ B. $y = x|x|$ C. $y = 2^x - 2^{-x}$ D. $y = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$
11. 已知 A, B 两点的距离为定值 2, 平面内一动点 C , 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S , 下面说法正确的是
- A. 若 $CA \perp CB$, 则 S 的最大值为 1 B. 若 $b = \sqrt{3}a$, 则 S 的最大值为 $\sqrt{3}$
 C. 若 $a - b = 1$, 则 S 的最大值为 $\frac{3}{2}$ D. 若 $\tan A \cdot \tan B = \frac{1}{3}$, 则 S 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知 a, b 是正实数, 且 $a + b = 4ab$, 则下列说法正确的是

A. ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

C. $a + 4b$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$

D. $a^3 + b^3 - \frac{15}{4}(a + b)^2$ 的最小值为 $-\frac{7}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, 向量 \vec{a} 在向量 \vec{c} 上的投影向量的坐标为_____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 且 $b_{1012} = 1$, 则 a_{2024} 的值为_____.

15. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 且对于任意 $a, b \in D, b \neq 0$ 均有 $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, 写出符合要求的一个函数 $f(x)$ 为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$, $\omega \in \mathbb{N}_+$, $\varphi \in [0, \pi]$, 在 $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right)$ 内恰有两个极值点, 且 $f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0$, 则 φ 的所有可能取值构成的集合是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 - 14n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \left| \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right|$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 13 项和 T_{13} .

18. (12 分)

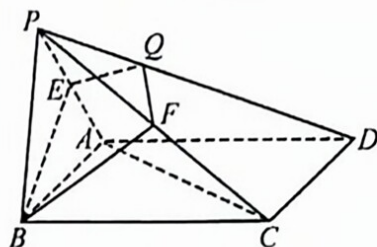
已知在 $\triangle ABC$ 中 $\sin C = \frac{4}{5}$, $2\sin(B - C) = \sin A$.

(1) 求 $\sin B$;

(2) 设 $BC = \frac{16}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是平行四边形, $BC = 2AB = 2$, $\angle ACB = 30^\circ$,侧面 PAB 是等边三角形.



(1)证明: $PB \perp AC$;

(2)点 E 是侧棱 PA 的中点,过 B, E 两点作平面 α ,设平面 α 与 PC, PD 分别交于点 F, Q ,当直线 $AC \parallel \alpha$ 时,求直线 PC 与平面 α 所成角的正弦值.

20. (12分)

某考生在做高考数学模拟题第 12 题时发现不会做. 已知该题有四个选项,为多选题,至少有两项正确,至多有 3 个选项正确. 评分标准为:全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,选到错误选项得 0 分. 设此题正确答案为 2 个选项的概率为 p_0 ($0 < p_0 < 1$). 已知该考生随机选择若干个(至少一个).

(1)若 $p_0 = \frac{1}{2}$,该考生随机选择 1 个选项,求得分 X 的分布列及数学期望;

(2)为使他此题得分数学期望最高,请你帮他以下二种方案中选一种,并说明理由.

方案一:随机选择一个选项;

方案二:随机选择二个选项.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$, $x \in D$. 其中 $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

(1)求函数 $f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线方程;

(2)若 $g(x) = -\frac{a}{\sqrt{x}}$,且 $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$ 恒成立,求 a 的取值范围.

22. (12分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 实轴左右两个顶点分别为 A, B ,双曲线 E 的焦距为 $2\sqrt{5}$,渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$.

(1)求双曲线 E 的标准方程;

(2)过点 $(0, 1)$ 直线 l 与双曲线 E 交于 C, D 两点. 设 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 ,且

$$\frac{k_1}{k_2} = -3, \text{求 } l \text{ 的方程.}$$