

西城区高三模拟测试

数学

2021.5

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\}$ ,  $B = \{x \mid x > -2\}$ , 则  $A \cap B =$

- (A)  $\{0, 1, 2, 3\}$  (B)  $\{1, 2, 3\}$   
(C)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$  (D)  $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$

(2) 已知复数  $z = ai + \frac{2}{1-i}$ , 其所对应的点在第四象限, 则实数  $a$  的取值范围是

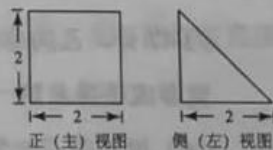
- (A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(1, +\infty)$   
(C)  $(-1, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -1)$

(3) 要得到函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象, 只需将函数  $y = \sin 2x$  的图象

- (A) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度

(4) 某三棱柱的三视图如图所示, 该三棱柱的体积为

- (A)  $\frac{8}{3}$  (B)  $\frac{4}{3}$   
(C) 8 (D) 4



(5) 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 2$ ,  $A = \frac{\pi}{6}$ , 则 “ $B = \frac{\pi}{3}$ ” 是 “ $b = 2\sqrt{3}$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件



- (6) 若直线  $y=2x$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  无公共点, 则双曲线  $C$  的离心率可能是  
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B) 1 (C) 2 (D)  $2\sqrt{3}$
- (7) “苏州码子”发源于苏州, 在明清至民国时期, 作为一种民间的数字符号曾经流行一时, 广泛应用于各种商业场合. 110 多年前, 詹天佑主持修建京张铁路, 首次将“苏州码子”刻于里程碑上. “苏州码子”计数方式如下: | (1)、|| (2)、||| (3)、× (4)、∩ (5)、+ (6)、≡ (7)、≡ (8)、× (9)、○ (0). 为了防止混淆, 有时要将“|”“||”“|||”横过来写. 已知某铁路的里程碑所刻数字代表距离始发车站的里程, 每隔 2 公里摆放一个里程碑, 若在 A 点处里程碑上刻着“|||×”, 在 B 点处里程碑刻着“×||”, 则从 A 点到 B 点里程碑的个数应为  
 (A) 29 (B) 30 (C) 58 (D) 59
- (8) 记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $a_1=8$ ,  $a_4=-1$ , 则数列  $\{S_n\}$   
 (A) 有最大项, 有最小项 (B) 有最大项, 无最小项  
 (C) 无最大项, 有最小项 (D) 无最大项, 无最小项
- (9) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A(1,1)$ ,  $B(2,1)$ ,  $C(2,2)$ ,  $P$  是圆  $M: x^2 + (y-4)^2 = 2$  上一点,  $Q$  是  $\triangle ABC$  边上一点, 则  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  的最大值是  
 (A)  $8+2\sqrt{2}$  (B) 12  
 (C)  $8+4\sqrt{2}$  (D) 16
- (10) 甲乙丙三个学生同时参加了若干门学科竞赛 (至少包含数学和物理), 在每科竞赛中, 甲乙丙三人中都有一个学生的分数为  $x$ , 另一个学生的分数为  $y$ , 第三个学生的分数为  $z$ , 其中  $x, y, z$  是三个互不相等的正整数. 在完成所有学科竞赛后, 甲的总分为 47 分, 乙的总分为 24 分, 丙的总分为 16 分, 且在甲乙丙这三个学生中乙的数学竞赛成绩排名第一, 则  
 (A) 甲乙丙三个学生至少参加了四门学科竞赛  
 (B)  $x, y, z$  这三个数中的最大值可以取到 21  
 (C) 在甲乙丙这三个学生中, 甲的物理竞赛成绩可能排名第二  
 (D) 在甲乙丙这三个学生中, 丙的物理竞赛成绩一定排名第二

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 已知向量  $a = (m, 1)$ ,  $b = (3, m)$ , 若  $a$  与  $b$  方向相反, 则  $m$  等于\_\_\_\_\_.

(12) 在  $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^3$  的展开式中, 常数项是\_\_\_\_\_.

(13) 对于抛物线  $C$ , 给出下列三个条件:

① 对称轴为  $y$  轴; ② 过点  $(1, 1)$ ; ③ 焦点到准线的距离为 2.

写出符合其中两个条件的一个抛物线  $C$  的标准方程\_\_\_\_\_.

(14) 共享单车已经成为方便人们出行的交通工具, 某公司决定从 2020 年 1 月开始向某地投放共享单车, 记第  $n (n \in \mathbf{N}^*)$  个月共享单车的投放量和损失量分别为  $a_n$  和  $b_n$  (单位: 千辆), 其中  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0.1$ . 从第 2 个月到 2021 年 12 月, 共享单车的每月投放量比上个月增加 1 千辆, 从 2022 年 1 月开始, 共享单车的每月投放量比上个月减少 1 千辆; 根据预测, 从 2020 年 1 月开始, 共享单车的每月损失量比上个月增加 100 辆. 设第  $n$  个月底的共享单车的保有量是前  $n$  个月的累计投放量与累计损失量的差, 则该地区第 4 个月底的共享单车的保有量为\_\_\_\_\_千辆; 当  $n$  为\_\_\_\_\_时, 该地区第  $n$  个月底的共享单车保有量达到最大.

(15) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |a^x - 1|, & x \leq 1, \\ (a-2)(x-1), & x > 1. \end{cases}$  其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . 给出下列四个结论:

① 若  $a \neq 2$ , 则函数  $f(x)$  的零点是 0;

② 若函数  $f(x)$  无最小值, 则  $a$  的取值范围为  $(0, 1)$ ;

③ 若  $a > 2$ , 则  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增;

④ 若关于  $x$  的方程  $f(x) = a - 2$  恰有三个不相等的实数根  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $a$  的取值范围为  $(2, 3)$ , 且  $x_1 + x_2 + x_3$  的取值范围为  $(-\infty, 2)$ .

其中, 所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

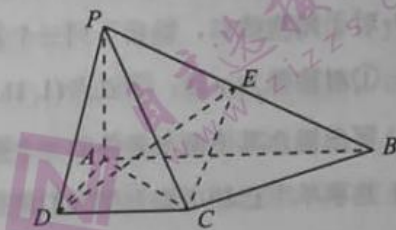
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB=4$ ， $PA=AD=CD=2$ ，点  $E$  为  $PB$  的中点。

(I) 求证：平面  $PBC \perp$  平面  $PAC$ ；

(II) 求二面角  $E-CD-A$  的余弦值。



(17) (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = 4 \sin \frac{\omega x}{2} \cos(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{3}) + m$  ( $\omega > 0$ )。在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定  $\omega$  和  $m$  值的两个条件作为已知。

(I) 求  $f(\frac{\pi}{3})$  的值；

(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上是增函数，求实数  $a$  的最大值。

条件①：  $f(x)$  最小正周期为  $\pi$ ；

条件②：  $f(x)$  最大值与最小值之和为 0；

条件③：  $f(0) = 2$ 。

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分。

(18) (本小题 14 分)

在新冠病毒疫情防控期间,北京市中小学开展了“优化线上教育与学生线下学习相结合”的教育教学实践活动.为了解某区教师对  $A, B, C, D, E$  五类线上教育软件的使用情况(每位教师都使用这五类教育软件中的某一类且每位教师只选择一类教育软件),从该区教师中随机抽取了 100 人,统计数据如下表,其中  $a > b, a, b \in \mathbb{N}$ .

教育软件类型	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
选用教师人数	10	15	$a$	30	$b$

假设所有教师选择使用哪类软件相互独立.

- (I) 若某校共有 300 名教师,试估计该校教师中使用教育软件  $C$  或  $E$  的人数;  
 (II) 从该区教师中随机抽取 3 人,估计这 3 人中至少有 2 人使用教育软件  $D$  的概率;  
 (III) 设该区有 3000 名教师,从中随机抽取 1 人,记该教师使用教育软件  $C$  或  $D$  的概率估计值为  $P_1$ ; 该区学校  $M$  有 600 名教师,其中有 200 人使用教育软件  $C$ , 100 人使用教育软件  $D$ ,从学校  $M$  中随机抽取 1 人,该教师使用教育软件  $C$  或  $D$  的概率值为  $P_2$ ; 从该区其他教师(除学校  $M$  外)中随机抽取 1 人,该教师使用教育软件  $C$  或  $D$  的概率估计值为  $P_3$ . 试比较  $P_1, P_2$  和  $P_3$  之间的大小.(结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 其长轴的两个端点分别为  $A(-3, 0), B(3, 0)$ .

- (I) 求椭圆  $C$  的标准方程;  
 (II) 点  $P$  为椭圆上除  $A, B$  外的任意一点,直线  $AP$  交直线  $x=4$  于点  $E$ , 点  $O$  为坐标原点,过点  $O$  且与直线  $BE$  垂直的直线记为  $l$ , 直线  $BP$  交  $y$  轴于点  $M$ , 交直线  $l$  于点  $N$ , 求  $\triangle BMO$  与  $\triangle NMO$  的面积之比.

(20) (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \ln x + bx + c$ ,  $g(x) = kx^2 + 2$ ,  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极大值 1.

(I) 求  $b$  和  $c$  的值;

(II) 当  $x \in [1, +\infty)$  时, 曲线  $y = f(x)$  在曲线  $y = g(x)$  的上方, 求实数  $k$  的取值范围.

(III) 设  $k=1$ , 证明: 存在两条与曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  都相切的直线.

1	2	3	4	5	6
4	11	6	21	15	36

(21) (本小题 15 分)

设  $A$  是正整数集的一个非空子集, 如果对于任意  $x \in A$ , 都有  $x-1 \in A$  或  $x+1 \in A$ , 则称  $A$  为自邻集. 记集合  $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ) 的所有子集中的自邻集的个数为  $a_n$ .

(I) 直接写出  $A_4$  的所有自邻集;

(II) 若  $n$  为偶数且  $n \geq 6$ , 求证:  $A_n$  的所有含 5 个元素的子集中, 自邻集的个数是偶数;

(III) 若  $n \geq 4$ , 求证:  $a_n \leq 2a_{n-1}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》