答案

一、单选题(共 40 分)

1.解：由题设，$A=\{x|-1<x-1<1\}=\{x|0<x<2\}$，而$B=\{y|y\geq 0\}$，所以$A\cap B=(0,2)$.故选：A

2．解：$z=(1-2i)(3-i)=1-7i$，z在复平面对应的点为(1,-7),在第象限.故选：D.

3．解：因为$\cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta=\frac{7}{4}$，

所以$\sin 2\theta=-\frac{3}{4}$..则$1+\sin 2\theta=\frac{1}{4}=\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2$.因为$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$，所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)<0$

故$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sqrt{2}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选：A.

4．解：由题意得：天干可看作公差为 10 的等差数列，地支可看作公差为 12 的等差数列，

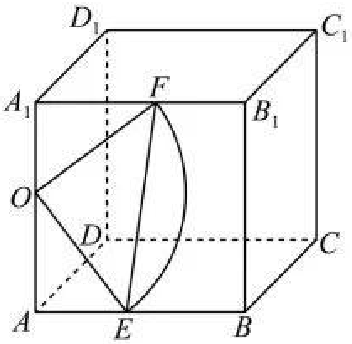
由于$100\div 10=10$，余数为 0，故 100 年后天干为癸，由于$100\div 12=8\cdots 4$，余数为 4，故 100 年后地支为未，

综上：100 年后的 2123 年为癸未年.故选：B

5．解：依题意，$\because OA=4$，$AA_1=7$，$OE=OF=5$，$\therefore AE=3=OA_1$，$A_1F=4=OA$，

所以$\triangle AEO\cong\triangle A_1OF$.所以$\angle AEO=\angle A_1OF$，又因为$\angle AEO+\angle AOE=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle A_1OF+\angle AOE=\frac{\pi}{2}$，

所以$\angle EOF=\pi-(\angle A_1OF+\angle AOE)=\frac{\pi}{2}$.即$OE\perp OF$.



在平面AA_1B_1B内满足条件的点为轨迹为$\overset{\frown}{EF}$，

该轨迹是以 5 为半径的$\frac{1}{4}$个圆弧，所以长度为$2\pi\times 5\times\frac{1}{4}=\frac{5\pi}{2}$；

同理，在平面AA_1D_1D内满足条件的点轨迹长度为$\frac{5\pi}{2}$；

在平面$A_1B_1C_1D_1$内满足条件的点的轨迹为以A_1为圆心，

A_1F为半径的圆弧，长度为$2\pi\times 4\times\frac{1}{4}=2\pi$；

同理，在平面$ABCD$内满足条件的点的轨迹为以A为圆心，AE为半径的圆弧，长度为$2\pi\times 3\times\frac{1}{4}=\frac{3\pi}{2}$.

故轨迹的总长度为$\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}+2\pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{17\pi}{2}$．故选:C.

6．解：以AB为直径的圆O的方程为$x^2+y^2=m^2$，圆心为原点，半径为$r_1=m$.圆$C:(x-5)^2+(y-12)^2=1$的圆心为$C(5,12)$，半径为$r_2=1$.

要使圆C上存在点P，使得$\angle APB=90°$，则圆O与圆C有公共点，

所以$|r_1-r_2|\leq|OC|\leq|r_1+r_2|$，即$|m-1|\leq\sqrt{5^2+12^2}\leq|m+1|$，

所以$\begin{cases}|m-1|\leq 13\\|m+1|\geq 13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-13\leq m-1\leq 13\\m+1\leq -13\text{或}m+1\geq 13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12\leq m\leq 14\\m\leq -12\text{或}m\geq 12\end{cases}$，

又$m>0$，所以$12\le m\le 14$，所以m的最小值为12.

故选：C

7. 选 C

8. 解：令$x=y=0$，即$f(0)\left(1-f^2(0)\right)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)\left(-1-f^2(0)\right)=0$，

则$f(0)=0$，令$x=-y$，即$f(0)\left[1-f(x)f(-x)\right]=f(x)+f(-x)=0$，则$f(x)+f(-x)=0$，

结合$f(x)$定义域为$(-1,1)$可知，$f(x)$是奇函数，

对于$f(x+y)\left[1-f(x)f(y)\right]=f(x)+f(y)$，用$-y$替代$y$，得到$f(x-y)\left[1-f(x)f(-y)\right]=f(x)+f(-y)$，

结合$f(x)$是奇函数，上式可化简成$f(x-y)\left[1+f(x)f(y)\right]=f(x)-f(y)$，$\forall x_1,x_2$，

且$0<x_2<x_1<1$，$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)\left[1+f(x_1)f(x_2)\right]$，

结合题目条件：当$x>0$时，$f(x)>0$，于是$f(x_1-x_2)>0$，$1+f(x_1)f(x_2)>0$，即$f(x_1)-f(x_2)>0$，

故$f(x)$在$(0,1)$上递增．又$f(x)$是定义域为$(-1,1)$的奇函数，

根据奇函数性质，$f(x)$在$(-1,1)$上递增，

于是$f(\ln x)>f\left(\frac{1}{2}\right)$等价于不等式：$\begin{cases}\ln x>\frac{1}{2}\\-1<\ln x<1\end{cases}$，解得$x\in(\sqrt{e},e)$故选：D

二、多选题(共 20 分)

9. 解：对于 A，因为$x<\frac{5}{4}$，则$4x-5<0$，所以$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3$

$=-(5-4x)-\frac{1}{5-4x}+3\le -2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+3=1$当且仅当$(5-4x)=\frac{1}{5-4x}$，即$x=1$时取等号，所以当$x<\frac{5}{4}$时，

$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值是1，故选项 A 错误，

对于B选项，因为关于x的不等式$ax^2+bx+c\le 0$的解集是$\{x|x\le -2或x\ge 6\}$，则$a<0$，关于x的方程$ax^2+bx+c=0$

的两根分别为$x_1=-2$，$x_2=6$，由韦达定理可得$6-2=-\frac{b}{a}$，可得$b=-4a$，$-2\times 6=\frac{c}{a}$，则$c=-12a$，

所以$a+b+c=-15a>0$，B 对.微信搜：高三答案公众号

对于 C，由$\vec{a}\parallel\vec{b}$，得$2-m(m-1)=0$，即$m^2-m-2=0$，解得$m=2$或$m=-1$，则 C 错误。

对于 D，已知$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,y)$,则$\vec{a}+\vec{b}=(3,3+y)$，

$\because\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，$\therefore 3\times 1+3\times(3+y)=0$，$y=-4$，$\vec{b}=(2,-4)$

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\times 2-3\times 4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，故 D 正确：故选：BD

10．解：$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$，

所以$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，对于A，$f(x)$的图象向右平移$\frac{5\pi}{6}$个单位长度后得到函数$y=\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$，

即$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$，A正确；

对于B，$f(-x)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\pi-\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=g(x)$，B正确；

对于C，由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$解得$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

所以函数的单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in Z)$，C正确；

因为$x\in[0,a]$，所以$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}+a\right]$，因为$f(x)$在$[0,a]$上有3个零点，所以$3\pi\le\frac{\pi}{3}+a<4\pi$，

解得$\frac{8\pi}{3}\le a<\frac{11\pi}{3}$，D错误，故选:ABC.

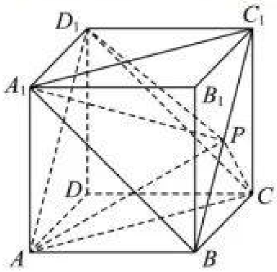
11．解：对于A，由正方体可得平面DAA_1D_1//平面BCC_1B_1，且$B,P\in$平面BCC_1B_1，

所以B到平面DAA_1D_1的距离等于P到平面DAA_1D_1的距离，

所以四面体A_1D_1AP的体积为$V_{P-AA_1D_1}=V_{B-AA_1D_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1D_1}\times 1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，

所以四面体A_1D_1AP的体积为定值，故A正确；

对于B，当P与B重合时，$AP+PC=AB+BC=2<2\sqrt{2}$，



所以$AP+PC$的最小值不为$2\sqrt{2}$，故B错误；

对于C，连接A_1C_1，A_1B

由正方体可得$AA_1=CC_1,AA_1//CC_1$，所以四边形AA_1C_1C是平行四边形，所以$AC//A_1C_1$，

因为$AC\subset$平面ACD_1，$A_1C_1\not\subset$平面ACD_1，所以$A_1C_1//$平面ACD_1，同理可得$BC_1//$平面ACD_1

因为$A_1C_1\cap BC_1=C_1$，A_1C_1，$BC_1\subset$平面A_1C_1B，所以平面$A_1C_1B//$平面ACD_1，

因为$A_1P\subset$平面A_1C_1B，所以$A_1P//$平面ACD_1，故C正确；

对于D，因为$AC//A_1C_1$，所以$\angle PA_1C_1$（或其补角）为直线A_1P与AC所成的角，

由图可得当P与B重合时，此时$\angle PA_1C_1$最大，故此时直线A_1P与AC所成的角最大，

所以四面体A_1PCA即四面体A_1BCA的外接球即为正方体的外接球，

所以外接球的直径为$2R=\sqrt{3}$，即$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以四面体A_1PCA的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，故D正确

故选：ACD

12．解：由题意可知：双曲线$C:x^2-y^2=\lambda(\lambda>0)$为等轴双曲线，则离心率为$\sqrt{2}$，故选项B错误；

由方程可知：双曲线$C:x^2-y^2=\lambda(\lambda>0)$的渐近线方程为$x\pm y=0$，不妨设点A在渐近线$x+y=0$上，点$B$在渐近线$x-y=0$上.因为渐近线互相垂直，由题意可知：平行四边形$OAPB$为矩形，则$k_{AP}=k_{OB}=1$，$k_{OA}=-1$，所以直线$AO$，$AP$的斜率之积为$-1$，故选项A正确；

设点$P(x_0,y_0)$，由题意知：$OAPB$为矩形，则$PB\perp OB,PA\perp OA$，由点到直线的距离公式可得：

$|PA|=\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}$，$|PB|=\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}$，则$|PA|+|PB|\geq 2\sqrt{|PA|\cdot|PB|}=2\sqrt{\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}=\sqrt{2\lambda}$

当且仅当$|PA|=|PB|$，也即P为双曲线右顶点时取等，所以$|PA|+|PB|$的最小值为$\sqrt{2\lambda}$，故选项C正确；

由选项C的分析可知：$|PA|\cdot|PB|=\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}\times\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}=\frac{\lambda}{2}$，因为四边形$OAPB$为矩形，所以$S_{OAPB}=|PA|\cdot|PB|=\frac{\lambda}{2}$，

故选项D错误，故选：AC.

三、填空题(共20分)

13．解：由题知$(1-2x)^{10}$的通项为$T_{r+1}=C_{10}^r(-2x)^r$，

当$r=1$时$C_{10}^1(-2x)^1=-20x$，所以展开式中x项的系数为-20，故答案为：-20

14．解：当$n=1$时，$a_1=2$；

当$n\geq 2$时，由$S_n=n+1$，可得$S_{n-1}=n$，故有$a_n=1(n\geq 2,n\in N^*)$.

故答案为：$a_n=\begin{cases}2(n=1)\\1(n\geq 2)\end{cases}$

15.解：$P(B)=\frac{C_3^1C_5^1C_5^2}{C_{20}^3},P(AB)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{20}^3},\therefore P(A/B)=\frac{P(AB)}{p(B)}=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}\div\frac{C_3^1C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{1}{3}$

16．解：方法一：

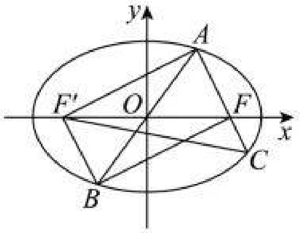
设椭圆的半焦距为c，左焦点为F'，则$|OF|=|OF'|=c$

因为A,B两点关于原点对称，所以$|OA|=|OB|$，又$|OA|=|OF|$，

所以$|OA|=|OB|=c$，所以四边形$AFBF'$为矩形，设$|CF|=m$，因为$|AF|=2|CF|$，所以$|AF|=2m$，由椭圆的定义可得$|AF'|=2a-2m$，$|CF'|=2a-m$，在$Rt\triangle CAF'$，$|CA|=3m$，$|CF'|=2a-m$，$|AF'|=2a-2m$，

所以$(2a-m)^2=9m^2+(2a-2m)^2$，所以$m=\frac{a}{3}$，故$|AF|=\frac{2a}{3}$，$|AF'|=\frac{4a}{3}$，

在 $\text{Rt}\triangle FAF'$ 中，$|FF'|=2c$，所以 $4c^2=\dfrac{4a^2}{9}+\dfrac{16a^2}{9}$，所以 $9c^2-5a^2=0$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



方法二：设椭圆的半焦距为 c，点 A 的坐标为 (s,t)，点 C 的坐标为 (m,n)，则点 B 的坐标为 $(-s,-t)$，点 F 的坐标为 $(c,0)$，且 $\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$①，$\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=1$②，②×4−①可得，$\dfrac{(2m+s)(2m-s)}{a^2}+\dfrac{(2n-t)(2n+t)}{b^2}=3$，

因为 AC 经过右焦点 F，$|AF|=2|CF|$，所以 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FC}$，所以 $(c-s,-t)=2(m-c,n)$，故 $2m+s=3c,2n+t=0$，

所以 $2m-s=\dfrac{a^2}{c}$，又 $2m+s=3c$，所以 $s=\dfrac{3c}{2}-\dfrac{a^2}{2c}=\dfrac{3c^2-a^2}{2c}$，因为 $|OA|=|OF|$，所以 $s^2+t^2=c^2$，又 $\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$，

所以 $s^2=\dfrac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}$，所以 $(3c^2-a^2)^2=4a^2(c^2-b^2)$，所以 $9c^4-14a^2c^2+5a^4=0$，即 $(9c^2-5a^2)(c^2-a^2)=0$，

又 $0<c<a$，所以 $9c^2-5a^2=0$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

四、解答题(共 70 分)

17．解：（1）由题设 $6a_2=a_3+a_4$，令 $\{a_n\}$ 公比为 $q>0$，则 $a_n=2q^{n-1}$，所以 $12q=2q^2+2q^3$，.........2 分

即 $q^2+q-6=(q+3)(q-2)=0$，则 $q=2$，故 $a_n=2^n$ ....4 分

（2）由（1）知：$b_n=\log_2 a_n=n$，则 $c_n=\dfrac{(n+1)^2-n}{n^2+n}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$，..6 分

$c_n=1+\dfrac{1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ....8 分

所以 $S_n=c_1+\ldots+c_n=n+(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=n+1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n(n+2)}{n+1}$ ....10 分

18．解：（1）因为 $\angle DAB=60°$，$AB=2$，$AD=1$，

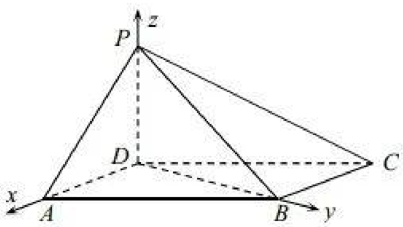
所以在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $DB^2=AD^2+AB^2-2AD\times AB\times\cos\angle DAB$，解得 $DB=\sqrt{3}$，..........2 分

所以在 $\triangle ABD$ 中 $AD^2+DB^2=AB^2$，所以 $BD\perp AD$，

又因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BD$，..4 分

因为 $AD\cap PD=D$，$AD,PD\subset$ 平面 PAD，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，又因为 $PA\subset$ 平面 PAD，

所以 $PA\perp BD$ ....



（2）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$，

结合（1）可知 DP,DA,DB 两两垂直，

以 D 为坐标原点，DA,DB,DP 为 x,y,z 轴建立如图所示坐标系，8 分

所以 $P(0,0,1)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\sqrt{3},-1)$，

设平面 APB 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}y_1-z_1=0\\ \overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=x_1-z_1=0\end{cases}$，解得 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，……………………9 分

设平面 CPB 的法向量 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=\sqrt{3}y_2-z_2=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0\end{cases}$，解得 $\vec{m}=(0,1,\sqrt{3})$，…………… 10 分

所以 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{4}{\sqrt{7}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，所以结合图像可得二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ …… 12 分

19．解：(1) 若选①来源：高中试卷答案公众号

因为 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos B\cos C=\sqrt{3}c\cos^2 B$，由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos B\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos^2 B$，

即 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\cos B(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sqrt{3}\cos B\sin(B+C)$，所以 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\cos B\sin A$，

由 $A\in(0,\pi)$，得 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……….4 分

若选②

由 $(\sin A-\sin C)^2=\sin^2 B-\sin A\sin C$，化简得 $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$，

由正弦定理得：$a^2+c^2-b^2=ac$，即 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$．4 分

若选③

由正弦定理得 $\dfrac{\sqrt{3}\sin B\sin A}{1+\cos B}=\sin A$，即 $\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A(1+\cos B)$ 因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\sin B=1+\cos B$，所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又因为 $-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………4 分

(2)在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$，$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin C}$ ………………………….6 分

由（1）知：$B=\dfrac{\pi}{3}$，又 $c=1$ 代入上式得：

$$a^2+b^2=c^2+2ab\cos C=1+2\left(\frac{\sin A}{\sin C}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}\right)\cos C=1+\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin^2 C}\cos C=1+\frac{\sqrt{3}\sin(B+C)}{\sin^2 C}\cos C$$

$$=1+\frac{\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}+C)}{\sin^2 C}\cos C=1+\sqrt{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin^2 C}\cos C=1+\frac{3}{2\tan^2 C}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}$$ ………………………8 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $C\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\dfrac{1}{\tan C}\in(0,\sqrt{3})$，10 分

所以 $a^2+b^2=1+\dfrac{3}{2\tan^2 C}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}\in(1,7)$ …………………………………………12 分

20．解：（1）根据散点图判断，$y=ce^{dx}$ 更适宜作为 5G 经济收入 y 关于月份 x 的回归方程类型；....3 分

（2)因为 $y=ce^{dx}$，所以两边同时取常用对数，得 $\ln y=\ln c+dx$，设 $u=\ln y$，所以 $u=\ln c+dx$，因为 $\bar{x}=3.50,\bar{u}=2.85$，

所以 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(u_i-\bar{u})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{6.73}{17.70}\approx 0.380$，所以 $\ln c=\bar{u}-\hat{d}\bar{x}\approx 2.85-0.380\times 3.50=1.52$

所以 $\hat{u}=1.52+0.38x$，即 $\ln\hat{y}=1.52+0.38x$，所以 $\hat{y}=e^{1.52+0.38x}$．令 $x=7$，得：

$\hat{y}=e^{1.52+0.38\times 7}=e^{1.52}\times e^{2.66}\approx 4.57\times 14.30\approx 65.35$，故预测该公司 7 月份的 5G 经济收入大约为 65.35 百万元．7 分

（3）前 6 个月的收入中，收入超过 20 百万元的有 3 个，所以 X 的取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，

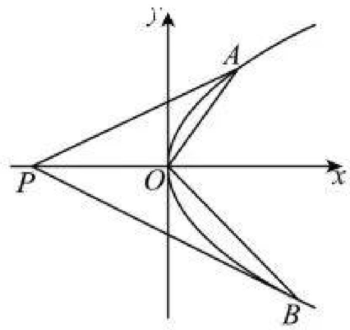
所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$ ....12 分

21．解：（1）由抛物线的定义得 $|MF|=1+\frac{p}{2}=2$，解得 $p=2$，则抛物线 C 的标准方程为 $C:y^2=4x$．4 分

（2）依题意知直线 OA 与直线 OB 的斜率存在，设直线 OA 方程为 $y=kx(k\neq 0)$，



由 $OA\perp OB$ 得直线 OB 方程为：$y=-\frac{1}{k}x$，

由 $\begin{cases}y=kx\\y^2=4x\end{cases}$ 解得点 $A\left(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k}\right)$，..6 分

由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x\\y^2=4x\end{cases}$ 解得点 $B(4k^2,-4k)$ ....8 分

由 $\angle APB=2\angle APO$ 得 $\angle OPA=\angle OPB$，假定在 x 轴上存在点 P 使得 $\angle OPA=\angle OPB$，设点 $P(x_0,0)$，

则由（1）得直线 PA 斜率 $k_{PA}=\dfrac{\frac{4}{k}}{\frac{4}{k^2}-x_0}=\dfrac{4k}{4-k^2x_0}$，直线 PB 斜率 $k_{PB}=\dfrac{-4k}{4k^2-x_0}$，................................10 分

由 $\angle OPA=\angle OPB$ 得 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则有 $\dfrac{4k}{4-k^2x_0}=\dfrac{4k}{4k^2-x_0}$，即 $4-k^2x_0=4k^2-x_0$，

整理得 $(k^2-1)(x_0+4)=0$，显然当 $x_0=-4$ 时，对任意不为 0 的实数 k，$(k^2-1)(x_0+4)=0$ 恒成立，即当 $x_0=-4$ 时，

$k_{PA}+k_{PB}=0$ 恒成立，$\angle OPA=\angle OPB$ 恒成立，

所以x轴上存在点P使得$\angle APB=2\angle APO$，点$P(-4,0)$……12分

22．解：（1）$f'(x)=ae^{ax}-1$

当$a\le 0$时，$f'(x)<0$恒成立$\therefore f(x)$在R上单调递减

当$a>0$时，令$f'(x)=0$解得$x=-\frac{\ln a}{a}$

当$x\in(-\infty,-\frac{\ln a}{a})$时，$f'(x)<0$.当$x\in(-\frac{\ln a}{a},+\infty)$时$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-\frac{\ln a}{a})$上单调递减，$(-\frac{\ln a}{a},+\infty)$上单调递增

综上所述，当$a\le 0$时，$f(x)$在R上单调递减。

当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\frac{\ln a}{a})$上单调递减，$(-\frac{\ln a}{a},+\infty)$上单调递增。……4分

（2）由$f(x)\ge g(x)$得，$e^{ax}-\sin x+\cos x-2\ge 0$恒成立，

令$F(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2$，$x\in[0,+\infty)$，

$F'(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x$　　$F(0)=0$　　$F'(0)=a-1$

当$a\ge 1$时，$ae^{ax}\ge e^{x}$

令$p(x)=e^x-x-1,x\in[0,+\infty)$，则$p'(x)=e^x-1\ge 0$，等号仅在$x=0$时取得，

所以$p(x)=e^x-x-1$在$[0,+\infty)$上单调递增，故$p(x)\ge p(0)=0$，等号仅在$x=0$时取得。

即$e^x\ge x+1$。来源：高三答案公众号

令$q(x)=x-\sin x$，则$q'(x)=1-\cos x\ge 0$恒成立，$\therefore q(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增。

$\therefore q(x)\ge q(0)=0$，即$x\ge\sin x$

$F'(x)\ge e^x-\cos x-\sin x\ge x+1-\cos x-\sin x\ge 0$，所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增

所以$F(x)\ge F(0)=0$，即$e^{ax}-\sin x+\cos x-2\ge 0$，

所以当$a\ge 1$时，$f(x)\ge g(x)$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立。

当$a<1$时，$F'(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x$，$x\in[0,+\infty)$，

设$h(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x,h'(x)=a^2e^{ax}+\sin x-\cos x=a^2e^{ax}+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，

当$0<a<1$时，$y=a^2e^{ax}$是R上的增函数，$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$在$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增，

即$0<a<1$时，$h'(x)=a^2e^{ax}+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$在$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$上递增，

$h'(0)=a^2-1<0,h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2e^{\frac{\pi}{2}a}+1>0$，故 $h'(x)=0$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内存在唯一解 x_0，

当 $0\le x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上递减，则 $h(x)\le h(0)=a-1<0$，

则 $F(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2$ 在 $[0,x_0)$ 上递减，故 $F(x)\le F(0)=0$，

当 $a\le 0$ 时，$F(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2=e^{ax}-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-2$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上递减，

则 $F(x)\le F(0)=0$，

即当 $a<1$ 时，存在 x 使得 $F(x)\le 0$，

这与不等式 $\sin x-e^{ax}+2\le f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立矛盾，

综合可知 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$……………………………………………………………………