

中原名校 2019—2020 学年上期期末联考

高三数学(文)试题

(考试时间: 120 分钟)

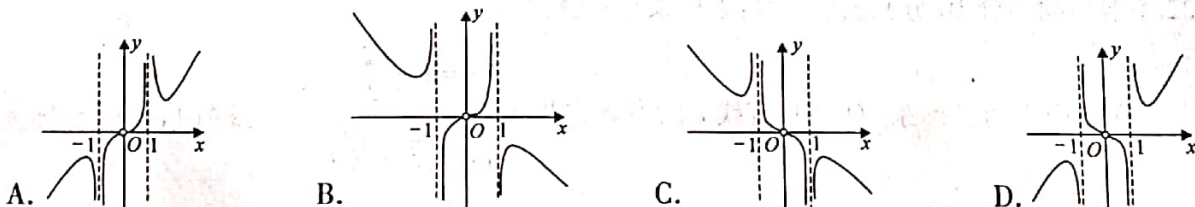
试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

1. 已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0, x \in N\}$, 则 $C_U M =$
 A. $\{-2, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
2. 已知 $z = 1 + i^{2019}$, 则 $|z - 2i| =$
 A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$
3. 若 $\tan\theta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta =$
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
4. 若直线 $y = kx - 2$ 与曲线 $y = 1 + 3\ln x$ 相切, 则 $k =$
 A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$
5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{a_n + 1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于
 A. $2^{n+1} - 2$ B. $3n$ C. $2n$ D. $3^n - 1$
6. 函数 $f(x) = \frac{x^3}{\ln|x|}$ 的图象大致为

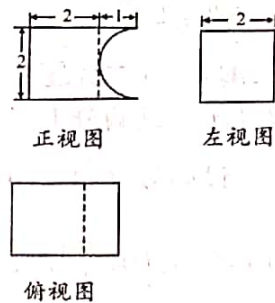


7. 三国时代吴国数学家赵爽所注《周髀算经》中给出了勾股定理的绝妙证明. 下面是赵爽的弦图及注文, 弦图是一个以勾股形之弦为边的正方形, 其面积称为弦实. 图中包含四个全等的勾股形及一个小正方形, 分别涂成红(朱)色及黄色, 其面积称为朱实、黄实, 利用 $2 \times \text{勾} \times \text{股} + (\text{股} - \text{勾})^2 = 4 \times \text{朱实} + \text{黄实} = \text{弦实}$, 化简, 得 $\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2$. 设勾股形中勾股比为 $1:\sqrt{3}$, 若向弦图内随机抛掷 1000 颗图钉(大小忽略不计), 则落在黄色图形内的图钉数大约为



- A. 134 B. 866 C. 300 D. 500

8. 我国古代科学家祖冲之儿子祖暅在实践的基础上提出了体积计算的原理：“幂势既同，则积不容异”（“幂”是截面积，“势”是几何体的高），意思是两个同高的几何体，如在等高处截面的面积恒相等，则它们的体积相等. 已知某不规则几何体与如图所示的三视图所表示的几何体满足“幂势既同”，则该不规则几何体的体积为



- A. $12 - \pi$
 B. $8 - \pi$
 C. $12 - \frac{\pi}{2}$
 D. $12 - 2\pi$

9. 已知不等式 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ 2x-y-2 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D , 若对任意的 $(x, y) \in D$, 不等式 $x-2y-t \geq 0$ 恒成立, 则实数 t 的最大值为

- A. 1 B. -1 C. -4 D. -5

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{12} > 0, S_{13} < 0$, 且 $\{S_n\}$ 的最大项为 $S_m, a_{m+1} = -2$, 则 $S_{13} =$

- A. -20 B. -22 C. -24 D. -26

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 P, Q 两点, 若 $\overrightarrow{FP} + 3\overrightarrow{FQ} = \mathbf{0}$, 则 ΔOPQ 的面积为

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4, & x \geq 0 \\ \log_2(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,

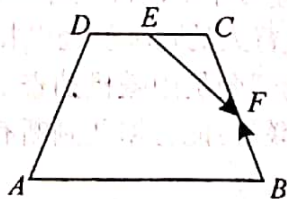
则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的取值范围是

- A. $(-12, 3)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $[-12, 3)$ D. $(0, 3]$

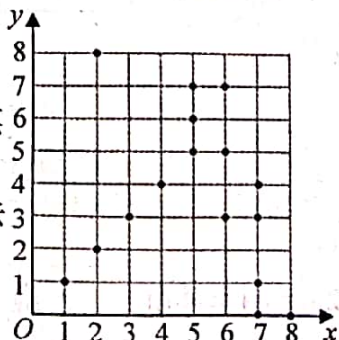
二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 直线 $l: y = kx + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 则“ ΔOAB 的面积为 $\frac{1}{2}$ ”成立的充要条件是_____.

14. 如图, 已知等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2DC = 4, AD = BC = \sqrt{5}$, E 是 DC 的中点, F 是线段 BC 上的动点, 则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值是_____.



15. 甲、乙、丙、丁四人进行一项益智游戏, 方法如下: 第一步: 先由四人看着平面直角坐标系中方格内的16个棋子(如图所示), 甲从中记下某个棋子的坐标; 第二步: 甲分别告诉其他三人: 告诉乙棋子的横坐标, 告诉丙棋子的纵坐标, 告诉丁棋子的横坐标与纵坐标相等; 第三步: 由乙、丙、丁依次回答. 对话如下: “乙先说无法确定, 丙接着说我也无法确定, 最后丁说我知道”. 则甲记下的棋子的坐标为_____.



16. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 P 到 A, B, C 三点的距离均为 8, $PA \perp PB, PA \perp PC$, 过点 P 作 $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足为 O , 连接 AO , 此时 $\cos \angle PAO = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

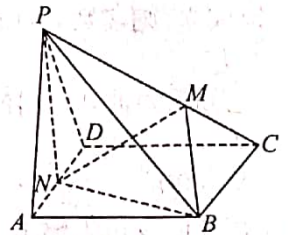
17. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 2 \cos^2 x$.

- (1) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;
 (2) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $f(A) = \frac{3}{2}, a = \sqrt{6}, b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $PA = PD = AD = 6$, 点 M 在线段 PC 上, 且 $PM = 2MC$, N 为 AD 的中点.

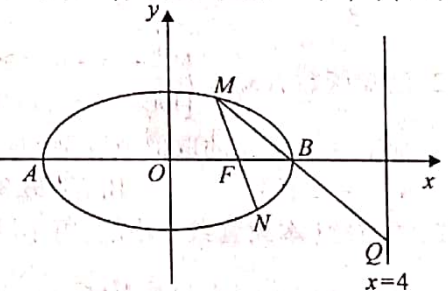


- (1) 求证: $AD \perp$ 平面 PNB ;
 (2) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求三棱锥 $P-NBM$ 的体积.

19. (本小题满分 12 分)

如图在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的中心在坐标原点 O , 其右焦点为 $F(1, 0)$, 且点 $(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 设椭圆的左、右顶点分别为 A, B , M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 直线 MF 交椭圆 C 于另一点 N , 直线 MB 交直线 $x=4$ 于 Q 点, 求证: A, N, Q 三点在同一条直线上.



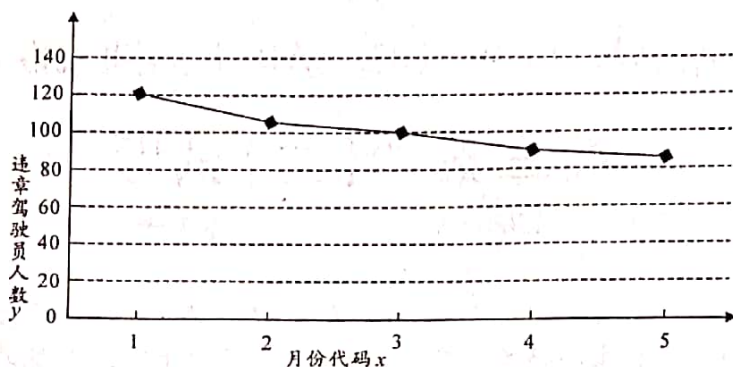
20. (本小题满分 12 分)

《中华人民共和国道路交通安全法》第 47 条的相关规定: 机动车行经人行横道时, 应当减速慢行; 遇行人正在通过人行横道, 应当停车让行, 俗称“礼让斑马线”, 《中华人民共和国道路交通安全法》第 90 条规定: 对不礼让行人的驾驶员处以扣 3 分, 罚款 50 元的处罚.

- (1) 交警从这 5 个月内通过该路口的驾驶员中随机抽查了 50 人, 调查驾驶员不“礼让斑马线”行为与驾龄的关系, 得到如下列联表: 能否据此判断有 97.5% 的把握认为“礼让斑马线”行为与驾龄有关?

	不礼让斑马线	礼让斑马线	合计
驾龄不超过 1 年	22	8	30
驾龄 1 年以上	8	12	20
合计	30	20	50

- (2) 下图是某市一主干路口监控设备所抓拍的 5 个月内驾驶员不“礼让斑马线”行为的折线图:



请结合图形和所给数据求违章驾驶员人数 y 与月份 x 之间的回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 并预测该路口 7 月份的不“礼让斑马线”违章驾驶员人数.

附注: 参考数据: $\sum_{i=1}^5 y_i = 500$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1415$.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \text{ (其中 } n = a+b+c+d \text{)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a+1}{x}$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 (2) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 证明: $xf(x) > a(\sin x + 1)$.

【选考题】

请考生在第 22 ~ 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 再以坐标原点

O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 圆 C 的方程为 $\rho = 2\sqrt{5}\sin\theta$.

- (1) 写出直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程;
 (2) 若 $P(2, \sqrt{5})$, 圆 C 与直线 l 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-b|$.

- (1) 当 $a=1, b=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 4$ 的解集;
 (2) 若 $a > 0, b > 0$, $f(x)$ 的最小值为 2, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.