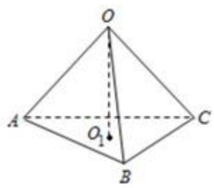
上海市普陀区2019届高三3月模拟练习（二模）数学试题

一、选择题（本大题共4小题，共20.0分）

1. 已知球O的半径为1，A、B、C三点都在球面上，且每两点间的球面距离均为$\frac{\pi}{2}$，则球心O到平面ABC的距离为(　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】B



【解析】解：显然OA、OB、OC两两垂直，

如图，设O_1为ABC所在平面截球所得圆的圆心，

$\because OA=OB=OC=1$，且$OA\perp OB\perp OC$，

$\therefore AB=BC=CA=\sqrt{2}$.

$\therefore O_1$为$\triangle ABC$的中心. $\therefore O_1A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由$OO_1^2+O_1A^2=OA^2$，可得$OO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B.

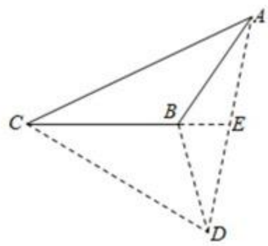
先确定内接体的形状，确定球心与平面ABC的关系，然后求解距离.

本题考查球的内接体问题，球心与平面的距离关系，考查空间想象能力，是中档题.

2. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=1.5$，$\angle ABC=120^{\circ}$，若将$\triangle ABC$绕直线BC旋转一周，则所形成的旋转体的体积是(　)

A. $\frac{9}{2}\pi$　　B. $\frac{7}{2}\pi$　　C. $\frac{5}{2}\pi$　　D. $\frac{3}{2}\pi$

【答案】D



【解析】解：如图：$\triangle ABC$中，绕直线BC旋转一周，

则所形成的几何体是以ACD为轴截面的圆锥中挖去了一个以ABD为轴截面的小圆锥后剩余的部分.

$\because AB=2$，$BC=1.5$，$\angle ABC=120^{\circ}$，$\therefore AE=AB\sin60^{\circ}=\sqrt{3}$，

$BE=AB\cos60^{\circ}=1$，

$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot AE^2\cdot CE=\frac{5\pi}{2}$，$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AE^2\cdot BE=\pi$，

$\therefore V=V_1-V_2=\frac{3\pi}{2}$，

故选：D.

所形成的几何体是以ACD为轴截面的圆锥中挖去了一个以ABD为轴截面的小圆锥后剩余的部分，故用大圆锥的体积减去小圆锥的体积，即为所求.

本题考查圆锥的体积公式的应用，判断旋转体的形状是解题的关键.

3. 将函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{12})$图象上的点 $P(\frac{\pi}{4},t)$向左平移 $s(s>0)$个单位，得到点 P'，若 P'位于函数 $y=\sin2x$ 的图象上，则(　)

A. $t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{12}$　　B. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$

C. $t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$　　D. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{12}$

【答案】C

【解析】解：将 $x=\frac{\pi}{4}$代入得：$t=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，进而求出平移后 P'的坐标，

将函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{12})$图象上的点 $P(\frac{\pi}{4},t)$向左平移 $s(s>0)$个单位，

得到点 P'，若 P'位于函数 $y=\sin2x$ 的图象上，

则 $\sin(\frac{\pi}{2}+2s)=\cos2s=\frac{1}{2}$，

则 $2s=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

则 $s=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

由 $s>0$ 得：当 $k=0$ 时，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$，

故选：C．

将 $x=\frac{\pi}{4}$代入得：$t=\frac{1}{2}$，进而求出平移后 P'的坐标，进而得到 s 的最小值．

本题考查的知识点是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象和性质，难度中档．

4. 已知 x，$y\in R$，且$\begin{cases}\sqrt{3}x+y\le4\sqrt{3}\\ \sqrt{3}x-y\ge0\\ y\ge0\end{cases}$，则存在$\theta\in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立的 $P(x,y)$构成的区域面积为(　)

A. $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$　　B. $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$

【答案】A

【解析】解：作出不等式组对应的平面区域如图：对应的区域为三角形 OAB，

若存在$\theta\in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立，

则$\sqrt{x^2+y^2}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta)=-1$，

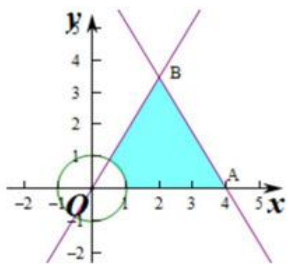
令 $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\cos\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则方程等价为$\sqrt{x^2+y^2}\sin(\alpha+\theta)=-1$，

即 $\sin(\alpha+\theta)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\because$存在$\theta\in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立，

$\therefore|-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le1$，即$x^2+y^2\ge1$，



则对应的区域为单位圆的外部，

由$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=4\sqrt{3}\\ \sqrt{3}x-y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\ y=2\sqrt{3}\end{cases}$，即$B(2,2\sqrt{3})$，

$A(4,0)$，则三角形OAB的面积$S=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

直线$y=\sqrt{3}x$的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，

则$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，即扇形的面积为$\frac{\pi}{6}$，

则$P(x,y)$构成的区域面积为$S=4\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$，

故选：A.

作出不等式组对应的平面区域，求解$x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$成立的等价条件，利用数形结合求出对应的面积即可得到结论.

本题主要考查线性规划的应用，根据条件作出对应的图象，求出对应的面积是解决本题的关键.综合性较强.

二、填空题（本大题共12小题，共54.0分）

5. 已知集合$A=\{x||x-1|>3\}$，$U=R$，则$C_UA=$______.

【答案】$[-2,4]$

【解析】解：$A=\{x||x-1|>3\}=\{x|x-1>3$ 或 $x-1<-3\}=\{x|x>4$ 或 $x<-2\}$，

则$C_UA=\{x|-2\le x\le4\}$，

故答案为：$[-2,4]$.

求出A的等价条件，结合补集的定义进行求解即可.

本题主要考查集合的基本运算，根据条件求出集合A的等价条件，结合补集的定义是解决本题的关键.

6. 已知复数$z=\frac{1+3i}{i}$(i是虚数单位)，则$Imz=$______.

【答案】-1

【解析】解：$\because z=\frac{1+3i}{i}=\frac{(1+3i)(-i)}{-i^2}=3-i$，

$\therefore Imz=-1$.

故答案为：-1.

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

7. 计算$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^2}{2n^2+n}=$______.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】解：$\because C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，

$\therefore\frac{C_n^2}{2n^2+n}=\frac{n-1}{4n+2}$.

$\therefore$原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

利用极限的运算法则即可得出．

本题考查了极限的运算法则，属于基础题．

8.　行列式$\begin{vmatrix} 4 & 2 & k \\ -3 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$中第2行第1列元素的代数余子式的值为$-10$，则$k=$______.

【答案】-14

【解析】解：由题意得$M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times 2+1\times k=-10$

解得：$k=-14$.

故答案为：-14.

根据余子式的定义可知，在行列式中划去第2行第1列后所余下的2阶行列式带上符号$(-1)^{i+j}$为M_{21}，求出其表达式列出关于k的方程解之即可．

此题考查学生掌握三阶行列式的余子式的定义，会进行矩阵的运算，是一道基础题．

9.　$50^{2019}+1$被7除后的余数为______.

【答案】2

【解析】解：$50^{2019}+1=(1+7)^{2019}+1=1+C_{2019}^{1}\cdot 7+C_{2019}^{2}\cdot 7^2+\ldots\ldots+C_{2019}^{2019}\cdot 7^{2019}+1=7(C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2}\cdot 7+\ldots\ldots+C_{2019}^{2019}\cdot 7^{2018})+2$.

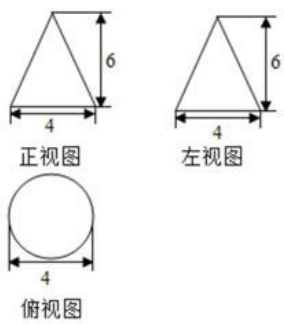
$\therefore 50^{2019}+1$被7除后的余数为2，

故答案为：2.

利用二项式定理展开即可得出．

本题考查了二项式定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

10. 某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的侧面积是______



【答案】$4\sqrt{10}\pi$

【解析】解：这个几何体为圆锥，圆锥的高为6，底面圆的直径为4，

所以圆锥的母线长$=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$，

第4页，共13页

所以该几何体的侧面积$=\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{10}\pi$.

故答案为：$4\sqrt{10}\pi$.
观察三视图.得到这个几何体为圆锥，圆锥的高为6，底面圆的直径为4，再利用勾股定理计算出母线长，然后根据圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和扇形面积公式求解.
本题考查了圆锥的计算：圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长.也考查了三视图.

11. 已知$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\tan(\alpha-\beta)=7$，则$\tan 2\beta=$______.

【答案】$-\frac{3}{4}$

【解析】解：由$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\tan(\alpha-\beta)=7$，

得$\tan 2\beta=\tan[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1-7}{1+1\times 7}=-\frac{3}{4}$.

故答案为：$-\frac{3}{4}$.

由已知结合$\tan 2\beta=\tan[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$，展开两角差的正切求解.
本题考查三角函数的化简求值，考查两角差的正切，是基础题.

12. 从5名同学中任选3人担任上海进博会志愿者，则“甲被选中，乙没有被选中”的概率是______.

【答案】$\frac{3}{10}$

【解析】解：从5名同学中任选3人担任上海进博会志愿者，
基本事件总数$n=C_5^3=10$，
“甲被选中，乙没有被选中”包含的基本事件有$m=C_1^1C_3^2=3$，

∴“甲被选中，乙没有被选中”的概率$P=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.

故答案为：$\frac{3}{10}$.

基本事件总数$n=C_5^3=10$，“甲被选中，乙没有被选中”包含的基本事件有$m=C_1^1C_3^2=3$，由此能求出“甲被选中，乙没有被选中”的概率.
本题考查概率的求法，考查古典概型、列举法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

13. 如果$(x^2-\frac{1}{2x})^n$的展开式中只有第4项的二项式系数最大，那么展开式中的所有项的系数之和是______.

【答案】$\frac{1}{64}$

【解析】解：根据题意，在$(x^2-\frac{1}{2x})^n$中，令$x=1$可得，其展开式中的所有项系数和是$(\frac{1}{2})^n$，

又由$(x^2-\frac{1}{2x})^n$的展开式中中只有第四项的二项式系数最大，

所以$n=6$.

则展开式中的所有项系数和是$(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$；

故答案为$\frac{1}{64}$.

先用赋值法，在$(x^2-\frac{1}{2x})^n$中，令$x=1$可得，其展开式中的所有项系数和是$(\frac{1}{2})^n$，进而根据题意，其展开式中中只有第四项的二项式系数最大，可得n的值为6，代入$(\frac{1}{2})^n$中，即可得答案.

本题考查二项式定理的应用，求二项式展开式所有项系数和的一般方法是令$x=1$，再计算二项式的值.

14. 若关于x、y的二元一次方程组$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \end{pmatrix}$至少有一组解，则实数m的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

【解析】解：关于x，y的二元一次方程组$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \end{pmatrix}$，即二元一次方程组$\begin{cases} mx+y=m+1 \\ x+my=2m \end{cases}$，

若直线$mx+y-(m+1)=0$与直线$x+my-2m=0$平行，

则$\begin{cases} m^2-1=0 \\ -2m^2+m+1\neq 0 \end{cases}$，解得$m=-1$.

∴若关于x、y的二元一次方程组$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \end{pmatrix}$至少有一组解，

则$m\neq-1$，即$m\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

先根据矩阵的乘法进行化简得到二元一次方程组，然后求出两直线平行的m的范围，取补集得答案.

本题考查了二元一次方程组的解的个数，考查矩阵的乘法运算，属于中档题.

15. 已知$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，则$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=$______

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】解：由$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，得$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta=3\times4\times\cos\theta=12$，

$\therefore\cos\theta=1$；

又$\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=0$；

$\therefore\vec{a}=\lambda\vec{b}$，且$\lambda>0$；

则$|\vec{a}|=\lambda|\vec{b}|$，

$\therefore\lambda=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda=\frac{3}{4}$，

$\therefore\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\lambda=\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$.

由平面向量的数量积求得$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角$\theta=0$，

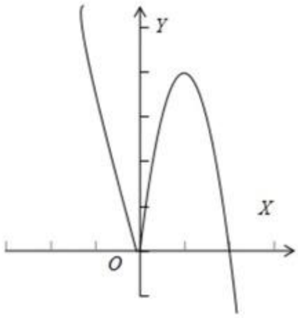
得出$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，计算λ的值，即可求得$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\lambda$.

本题考查了空间向量的坐标运算与数量积运算问题，是基础题.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^{-x}-1, x\le 0\\ -4x^2+8x, x>0\end{cases}$，若存在唯一的整数 x，使得不等式 $\frac{f(x)-a}{x}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$[0,3]\cup[4,15]$

【解析】解：根据题意，函数 $f(x)=\begin{cases}4^{-x}-1, x\le 0\\ -4x^2+8x, x>0\end{cases}$，其图象如图：



分 2 种情况讨论：

①，当 $x>0$ 时，$f(x)\le f(1)=4$，

若存在唯一的整数 x，使得不等式 $\frac{f(x)-a}{x}>0$ 成立，即 $f(x)-a>0$ 有唯一的整数解，

又 $f(2)=0$，则此时有 $0\le a<4$.

②，当 $x<0$ 时，则 $f(x)\ge f(0)=0$，

若存在唯一的整数 x，使得不等式 $\frac{f(x)-a}{x}>0$ 成立，即 $f(x)-a<0$ 有唯一的整数解，

又由 $f(-1)=3$，$f(-2)=15$，

则此时有 $3<a\le 15$，

综合可得：$0\le a\le 3$ 或 $4\le a\le 15$；

则 a 的取值范围为 $[0,3]\cup[4,15]$；

故答案为：$[0,3]\cup[4,15]$.

根据题意，由函数 f(x)的解析式作出 f(x)的函数图象，得出 f(x)的单调性和极值，对 x 的符号进行讨论，根据不等式只有 1 整数解得出 a 的范围.

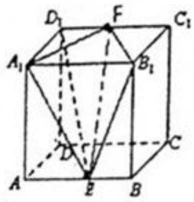
本题考查分段函数的应用，注意分析函数 f(x)的图象，属于基础题.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 76.0 分）

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，E、F 分别是棱 AB、D_1C_1 的中点，联结 EF、FB_1、FA_1、D_1E、A_1E、B_1E.

(1)求三棱锥 A_1-FB_1E 的体积；

(2)求直线 D_1E 与平面 B_1EF 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



【答案】解：(1)∵正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，E、F 分别是棱 AB、D_1C_1 的中点，

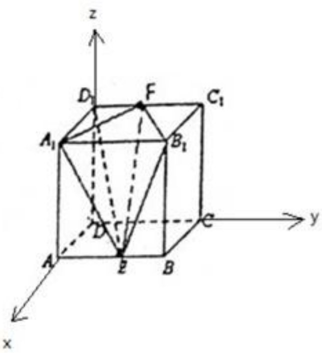
连结 EF、FB_1、FA_1、D_1E、A_1E、B_1E.

∴三棱锥 A_1-FB_1E 的体积

$$V_{A_1-FB_1E}=V_{E-A_1B_1F}=\frac{1}{3}\times AA_1\times S_{\triangle A_1B_1F}$$

$$=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{2}\times 4\times 4$$

$=\frac{32}{3}$.



(2)以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直

第 7 页，共 13 页

角坐标系，

$D_1(0,0，4)$，$E(4,2，0)$，$B_1(4,4，4)$，$F(0,2，4)$，

$\overrightarrow{EB_1}=(0,2，4)$，$\overrightarrow{EF}=(-4,0，4)$，$\overrightarrow{ED_1}=(-4,-2,4)$，

设平面B_1EF的法向量$\vec{n}=(x,y，z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=2y+4z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-4x+4z=0\end{cases}$，取$x=1$，得$\vec{n}=(1,-2,1)$，

设直线D_1E与平面B_1EF所成角的大小为θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{ED_1}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{ED_1}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，

$\therefore$直线D_1E与平面B_1EF所成角的大小为$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$.

【解析】(1)三棱锥A_1-FB_1E的体积$V_{A_1-FB_1E}=V_{E-A_1B_1F}=\frac{1}{3}\times AA_1\times S_{\triangle A_1B_1F}$，由此能求出结果.

(2)以D为原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x，y，z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出直线D_1E与平面B_1EF所成角的大小.

本题考查三棱锥的体积的求法，考查线面角的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题.

18. 已知函数$f(x)=ax^2-2ax+2(a>0)$在区间$[-1,4]$上的最大值为10.

(1)求a的值及f(x)的解析式；

(2)设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，若不等式$g(3^x)-t\cdot3^x\geq0$在$x\in[0,2]$上有解，求实数t的取值范围.

【答案】解：(1)$f'(x)=2ax-2a=2a(x-1)$，$(a>0)$，

令$f'(x)>0$，解得：$x>1$，

令$f'(x)<0$，解得：$x<1$，

故f(x)在$[-1,1)$递减，在$(1,4]$递增，

$\because 1-(-1)<4-1$，

故$f(x)_{max}=f(4)=16a-8a+2=8a+2=10$，解得：$a=1$，

故$f(x)=x^2-2x+2$；

(2)由(1)$g(x)=x+\frac{2}{x}-2$，

若不等式$g(3^x)-t\cdot3^x\geq0$在$x\in[0,2]$上有解，

则$3^x+\frac{2}{3^x}-2-t\cdot3^x\geq0$在$x\in[0,2]$上有解，

即$t\leq2(\frac{1}{3^x})^2-2(\frac{1}{3^x})+1=2(\frac{1}{3^x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$在$x\in[0,2]$上有解，

令$\frac{1}{3^x}=u\in[\frac{1}{9},1]$，

$\because x\in[0,2]$，

则$t\leq2(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$在$u\in[\frac{1}{9},1]$上有解，

当$u\in[\frac{1}{9},1]$时，$2(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\in[\frac{1}{2},1]$，

于是$t\leq1$，

故实数t的范围是$(-\infty,1]$.

【解析】(1)求出函数的导数，解关于导函数的不等式，求出函数的单调区间，求出 a 的值，求出函数的解析式即可；

(2)问题转化为 $t \le 2(\frac{1}{3^x})^2 - 2(\frac{1}{3^x}) + 1 = 2(\frac{1}{3^x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$在 $x \in [0,2]$上有解，令$\frac{1}{3^x} = u \in [\frac{1}{9},1]$，根据函数的单调性求出 t 的范围即可．

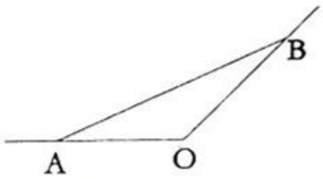
本题考查了函数的单调性，最值问题，考查导数的应用以及函数恒成立问题，考查转化思想，换元思想，是一道综合题．

19. 如图，某城市有一条从正西方 AO 通过市中心 O 后向东北 OB 的公路，现要修一条地铁 L，在 OA，OB 上各设一站 A，B，地铁在 AB 部分为直线段，现要求市中心 O 与 AB 的距离为 10(km)，设地铁在 AB 部分的总长度为 y(km)．

(1)按下列要求建立关系式：

(i)设$\angle OAB = \alpha$，将 y 表示成α的函数；

(i)设 OA = m，OB = m 用 m，n 表示 y．



(2)把 A，B 两站分别设在公路上离中心 O 多远处，才能使 AB 最短？并求出最短距离．

【答案】解：(1)(i)过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H

由题意得，$\angle AOH = \frac{\pi}{2} - \alpha, \angle BOH = \pi - \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{4} + \alpha$

且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\tan\angle AOH = \cot\alpha = \frac{AH}{10}$

即 $AH = 10\cot\alpha$...(2 分)

$\tan\angle BOH = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{BH}{10}$即 $BH = 10\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$...(4 分)

$\therefore AB = BH + AH = 10\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) + 10\cot\alpha = 10(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}) = \frac{20}{\sqrt{2}\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) - 1}$...(8 分)

(ii) 由等面积原理得，$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot 10 = \frac{1}{2}mn\sin\frac{3\pi}{4}$即 $AB = \frac{mn}{10\sqrt{2}}$...(10 分)

(2)选择方案一：当$\alpha = \frac{\pi}{8}$时$|AB|_{min} = 20(\sqrt{2} + 1)$，...(12 分)

此时 $OA = OB = \frac{10}{\sin\frac{\pi}{8}}$，而 $\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $OA = OB = 10\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.　　　　...(14 分)

选择方案二：因为 $\tan\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$，

由余弦定理得 $AB^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\frac{3\pi}{4} = m^2 + n^2 + \sqrt{2}mn \ge (2 + \sqrt{2})mn$

$\therefore AB^2 \geq 20(\sqrt{2}+1)AB$...(12 分)

即 $AB \geq 20(\sqrt{2}+1)$(当且仅当 $m=n=10\sqrt{4+2\sqrt{2}}$时取等号)...(14 分)

【解析】(1)(i)过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H，则由$\angle AOH=\frac{\pi}{2}-\alpha, \angle BOH=\pi-\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{4}+\alpha$及直角三角形的三角关系可求 $AH=10\cot\alpha$，$BH=10\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$，而 $AB=AH+BH$，整理即可

(ii)由等面积原理得，$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 10=\frac{1}{2}mn\sin\frac{3\pi}{4}$可求 AB

(2)选择方案一：结合正弦函数的性质可求 AB 的最小值

选择方案二：由余弦定理得 $AB^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{3\pi}{4}=m^2+n^2+\sqrt{2}mn \geq (2+\sqrt{2})mn$，结合基本不等式可求 AB 的最小值

本题主要考查了解三角形在实际问题中的应用，综合考查了基本不等式的知识，解题的关键是合理的把实际问题转化为数学问题

20. 已知动直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$两个不同的点，O 为坐标原点.

(1)若直线 l 过点(1,0)，且原点到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，求直线 l 的方程；

(2)若$\triangle$ OPQ 的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求证：$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$均为定值；

(3)椭圆 C 上是否存在三点 D、E、G，使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$? 若存在，判断$\triangle$ DEG 的形状；若不存在，请说明理由.

【答案】解：(1)设直线方程为 $x=my+1$，

$\because$原点到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore d=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $m=\pm 1$ 时，

此时直线方程为 $x\pm y-1=0$，

(2)1°当直线 l 的斜率不存在时，P，Q 两点关于 x 轴对称，

所以$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，

$\because P(x_1,y_1)$在椭圆上，

$$\therefore \frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1 ①$$

又$\because S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\therefore |x_1||y_1|=\frac{\sqrt{2}}{2} ②$$

由①②得$|x_1|=1$，$|y_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.此时$x_1^2+x_2^2=2$，$y_1^2+y_2^2=1$；

2°当直线 l 的斜率存在时，是直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq 0)$，将其代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2(m^2-1)=0$，$\Delta=16k^2m^2-8(2k^2+1)(m^2-1)>0$

即 $2k^2+1>m^2$，

又$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2(m^2-1)}{2k^2+1}$，

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1}$，

$\because$点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$$\therefore S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1}\cdot|m|$$

又$S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1-m^2}}{2k^2+1}\cdot|m|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

整理得 $2k^2+1=2m^2$，

此时$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\frac{4km}{2k^2+1})^2-2\times\frac{2(m^2-1)}{2k^2+1}=2$，

$y_1^2+y_2^2=(1-\frac{1}{2}x_1^2)+(1-\frac{1}{2}x_2^2)=2-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=1$；

综上所述$x_1^2+x_2^2=2$，$y_1^2+y_2^2=1$.结论成立.

(3)椭圆 C 上不存在三点 D，E，G，使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

证明：假设存在 $D(u,v)$，$E(x_1,y_1)$，$G(x_2,y_2)$，使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

由(2)得$u^2+x_1^2=2$，$u^2+x_2^2=2$，$x_1^2+x_2^2=2$；$v^2+y_1^2=1$，$v^2+y_2^2=1$，$y_1^2+y_2^2=1$

解得$u^2=x_1^2=x_2^2=1$；$v^2=y_1^2=y_2^2=\frac{1}{2}$.

因此 u，x_1，x_2只能从±1中选取，

v，y_1，y_2只能从$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$中选取，

因此点 D，E，G，只能在$(\pm1,\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$这四点中选取三个不同点，

而这三点的两两连线中必有一条过原点，与$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$矛盾.

所以椭圆 C 上不存在满足条件的三点 D，E，G.

【解析】(1)根据点到直线的距离公式即可求出.

(2)分情况讨论，根据已知设出直线 l 的方程，利用弦长公式求出|PQ|的长，利用点到直线的距离公式求点 O 到直线 l 的距离，根据三角形面积公式，即可求得$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$均为定值；

(3)假设存在 $D(u,v)$，$E(x_1,y_1)$，$G(x_2,y_2)$，使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$由(2)得$u^2+x_1^2=2$，$u^2+x_2^2=2$，$x_1^2+x_2^2=2$；$v^2+y_1^2=1$，$v^2+y_2^2=1$，$y_1^2+y_2^2=1$，从而求得点 D，E，G，的坐标，可以求出直线 DE、DG、EG 的方程，从而得到结论.

本题考查了直线与椭圆的位置关系，弦长公式和点到直线的距离公式，是一道综合性的试题，考查了学生综合运用知识解决问题的能力.其中问题(3)是一个开放性问题，考查了同学们观察、推理以及创造性地分析问题、解决问题的能力，属于难题.

21. 已知无穷数列$\{a_n\}$的各项都不为零，其前 n 项和为S_n，且满足$a_n\cdot a_{n+1}=S_n(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{a_n+t}$，其中 t 为正整数.

(1)求a_{2018}；

(2)若不等式$a_n^2+a_{n+1}^2<S_n+S_{n+1}$对任意$n\in N^*$都成立，求首项$a_1$的取值范围；

(3)若首项a_1是正整数，则数列$\{b_n\}$中的任意一项是否总可以表示为数列$\{b_n\}$中的其他两项之积？若是，请给出一种表示方式；若不是，请说明理由.

【答案】解：(1)令$n=1$时，$a_1a_2=S_1$，

由于：无穷数列$\{a_n\}$的各项都不为零，

所以：$a_2=1$，

由：$a_n\cdot a_{n+1}=S_n$，

所以：$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=S_{n+1}$，

两式相减得：$a_{n+2}-a_n=1$，

所以：数列$\{a_{2n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列.

则：$a_{2018}=a_2+(\frac{2018}{2}-1)=1009$.

(2)由(1)知，数列$\{a_{2n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列，

数列$\{a_{2n-1}\}$的首项a_1，公差为1的等差数列.

故：$a_n=\begin{cases}a_1+(\frac{n+1}{2}-1)=a_1+\frac{n+1}{2} & (n\text{ 为奇数})\\ \frac{n}{2} & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$，

所以：$S_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}a_1+\frac{n^2-1}{4} & (n\text{ 为奇数})\\ \frac{n}{2}a_1+\frac{n^2}{4} & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$.

①当n为奇数时，$a_n^2+a_{n+1}^2<S_n+S_{n+1}$，

即：$(a_1+\frac{n-1}{2})^2+(\frac{n+1}{2})^2<[\frac{n+1}{2}a_1+\frac{n^2-1}{4}]+[\frac{n+1}{2}a_1+\frac{(n+1)^2}{4}]$，

即：$a_1^2-2a_1<\frac{n-1}{2}$对任意的正奇数n都恒成立，

所以：$a_1^2-2a_1<0$，

即：$0<a_1<2$.

②当n为偶数时，$a_n^2+a_{n+1}^2<S_n+S_{n+1}$，

即：$(\frac{n}{2})^2+(a_1+\frac{n}{2})^2<[\frac{na_1}{2}+\frac{n^2}{4}]+[\frac{n+2}{2}a_1+\frac{(n+1)^2-1}{4}]$，

即：$a_1^2-2a_1<\frac{n}{2}$对任意的正偶数恒成立，

所以：$a_1^2-2a_1<1$，

即：$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a_1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

综合①②得：$0<a_1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(3)数列$\{a_{2n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列，数列$\{a_{2n-1}\}$的首项a_1，公差为1的等差数列.

得知：数列的各项都为正值.

设$b_n=b_mb_k$

则：$\frac{a_n}{a_n+t}=\frac{a_m}{a_m+t}\cdot\frac{a_k}{a_k+t}$

取$k=n+2$，则：$a_k-a_n=1$，

故：$a_m=a_n(a_{n+2}+t)$，

不妨设 m 为偶数,则$\frac{m}{2}=a_n(a_{n+2}+t)$一定为整数.

当 n 为偶数时，方程$b_n=b_mb_k$的一组解是：$\begin{cases}k=n+2\\m=n(\frac{n}{2}+t+1)\end{cases}$，

当 n 为奇数时，方程$b_n=b_mb_k$的一组解是：$\begin{cases}k=n+2\\m=2(a_1+\frac{n-1}{2})(a_1+\frac{n+1}{2}+t)\end{cases}$，

故：数列$\{b_n\}$中的任意一项总可以表示为数列$\{b_n\}$中的其他两项之积.

【解析】(1)直接利用赋值法求出结果.

(2)利用分类讨论法确定数列的首项的范围.

(3)利用构造数列法求出数列的各项，进一步确定结果.

本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法及应用，数列的前 n 项和的应用.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注