参考答案及解析

文科数学(一)

一、选择题

1. C 【解析】由已知得 $M\cup N=\{1,2,3,4,6,8,10\}$,全集 $I=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,故 $\complement_I(M\cup N)=\{0,5,7,9\}$.

2. B 【解析】因为 $z=\dfrac{a+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(a+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{a+2}{2}+\dfrac{2-a}{2}\mathrm{i}$,所以 $\left(\dfrac{a+2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2-a}{2}\right)^2=10$,解得 $a=\pm4$.代入检验知,$a=-4$ 符合题意.

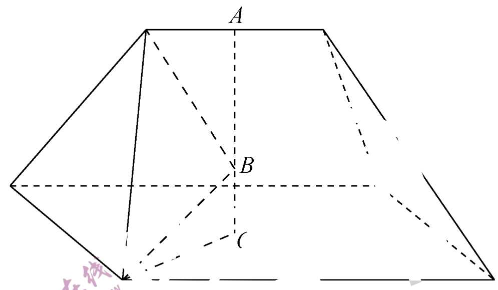
3. A 【解析】由题意得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\geqslant2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}-2=0$(当且仅当 $x=0$ 时,等号成立),可知 $f'(x)$ 为增函数.当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>f'(0)=0$,则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数,故排除选项 BD;又 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故排除选项 C.

4. C 【解析】对于 A,平均数为 $(45\times0.01+55\times0.015+65\times0.02+75\times0.03+85\times0.015+95\times0.01)\times10=70.5$,所以 A 正确;对于 B,因为 $[40,50)$,$[50,60)$,$[60,70)$ 三组数据的频率为 $(0.01+0.015+0.02)\times10=0.45$,所以 B 正确;对于 C,全区学生调查问卷成绩在 $[60,70)$ 的学生人数为 $12\ 000\times0.02\times10=2\ 400$,所以 C 不正确;对于 D,$[80,90)$,$[90,100]$ 两组数据的频率为 $(0.01+0.015)\times10=0.25$,所以 D 正确.

5. B 【解析】因为 $S_{1\,023}-S_{1\,000}=a_{1\,001}+a_{1\,002}+\cdots+a_{1\,023}=23a_{1\,012}=1$,所以 $a_{1\,012}=\dfrac{1}{23}$,故 $S_{2\,023}=\dfrac{a_1+a_{2\,023}}{2}\times2\ 023=a_{1\,012}\times2\ 023=\dfrac{2\ 023}{23}$.

6. C 【解析】从 A,B,C,D,E 共 5 个自然村中任选 3 个的情况有 (A,B,C),(A,B,D),(A,B,E),(B,C,D),(B,C,E),(C,D,E),(A,C,D),(A,C,E),(A,D,E),(B,D,E),共 10 种,其中 A,B 两个自然村恰有 1 个被选中的情况有 (B,C,D),(B,C,E),(A,C,D),(A,C,E),(A,D,E),(B,D,E),共 6 种,所以 A,B 两个自然村恰有 1 个被选中的概率 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

7. D 【解析】如图,设底面中心为 O,上棱中点为 A,外接球的球心为 B,半径为 R,因为刍甍的底边长为 4,底边宽为 2,所以底面外接圆的半径 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5}$.因为上棱长为 2,高为 4,所以 $OB^2+(\sqrt{5})^2=(4-OB)^2+1^2$,解得 $OB=\dfrac{3}{2}$,所以 $R^2=(\sqrt{5})^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{29}{4}$,则 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{29}{4}=29\pi$.



8. C 【解析】该程序的运行过程为 $a=1,b=1,b<40$,判断框条件不成立,开始执行循环体,$a=1+1=2$,$b=2\times2-3=1<40$,继续循环;$a=2+1=3$,$b=2\times3-3=3<40$,继续循环;$a=3+3=6$,$b=12-3=9<40$,继续循环;$a=9+6=15$,$b=2\times15-3=27<40$,继续循环;$a=15+27=42$,$b=2\times42-3=81>40$,跳出循环,输出 $b=81$.

9. A 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=12$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+2=6$,所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|}=\dfrac{6}{2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

10. D 【解析】由 $\sin\alpha=\sqrt{5}\sin\beta$,$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$ 得 $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=5\sin^2\beta+\cos^2\beta$,所以 $1+\cos^2\alpha=4\sin^2\beta+1$,即 $\cos^2\alpha=4\sin^2\beta$.又 α,β 均为锐角,所以 $\cos\alpha=2\sin\beta$,又 $\sin\alpha=\sqrt{5}\sin\beta$,所以 $\cos\alpha=2\times\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}$,解得 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.又 $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$,所以 $2\sqrt{2}\sin\beta=\cos\beta$,解得 $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,所以 $\tan^2\alpha-\tan\beta=\dfrac{5-\sqrt{2}}{4}$.

11. C 【解析】连接 AM.由渐近线的定义,得 $M(a,b)$.由 $\angle FNA=90^\circ$,得 $|ON|^2=|OF|\cdot|OA|$,即 $|ON|=\sqrt{ac}$.因为 $ON/\!/AM$,所以 $\dfrac{|ON|}{|AM|}=\dfrac{|OF|}{|AF|}$,即 $\dfrac{\sqrt{ac}}{b}=\dfrac{c}{c+a}$,化简得 $c^2-2ac-a^2=0$,两边同除以 a^2,得 $e^2-2e-1=0$,解得 $e=1+\sqrt{2}$($1-\sqrt{2}$ 舍去).

12. D 【解析】由 $f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 为偶函数,知 $f(x)$ 的图象

关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称，则 $-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=m\pi+\frac{\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$ ①；由 $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数，知 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，则 $\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=n\pi,n\in\mathbf{Z}$ ②，所以由①②，得 $\varphi=\frac{m+n}{2}\pi+\frac{\pi}{4},m,n\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.将 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 代入②，得 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}=n\pi,n\in\mathbf{Z}$，则 $\omega=\frac{3}{4}(4n-1),n\in\mathbf{Z}$.因为 $\omega>0$，所以 $4n-1>0,n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*$.当 $n=1$ 时，$\omega=\frac{9}{4}$.

二、填空题

13. -3 【解析】由条件可知，$f'(x)=2x+2f'(1)+\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=2+2f'(1)+1$，解得 $f'(1)=-3$.

14. $\frac{21\pi}{20}$ 【解析】$\tan\theta=\dfrac{\cos\frac{6\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}}{\cos\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}}=\dfrac{1-\tan\frac{6\pi}{5}}{1+\tan\frac{6\pi}{5}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{6\pi}{5}\right)=\tan\left(-\frac{19\pi}{20}\right)$，则 $\theta=k\pi-\frac{19\pi}{20},k\in\mathbf{Z}$.因为 $\cos\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}<0,\cos\frac{6\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}<0$，所以 θ 的终边在第三象限.又 $\theta\in(0,2\pi)$，所以取 $k=2$，得 $\theta=\frac{21\pi}{20}$.

15. 0 【解析】根据题意，$f(x+1)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故 $f(1)=0$.又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)=f(x-1)$，则 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.所以 $f(2\ 023)=f(4\times506-1)=f(-1)=f(1)=0$.

16. 1 【解析】设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$，显然，直线 AB 的斜率存在，且 $k=\dfrac{\frac{x_2^2}{2p}-\frac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{2p}$，则直线 AB 的方程为 $y=\frac{x_1+x_2}{2p}x+2$.联立 $\begin{cases}y=\frac{x_1+x_2}{2p}x+2,\\x^2=2py,\end{cases}$ 整理得 $x^2-(x_1+x_2)x-4p=0$，则 $x_1x_2=-4p$，由 $x^2=2py$，得 $y=\frac{x^2}{2p}$，求导得 $y'=\frac{x}{p}$，故切线 AM 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$ ①，同理可得切线 BM 的方程为 $y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}$ ②，两式相减，得 M 的横坐标 $a=\frac{x_1+x_2}{2}$，两式相加，得 M 的纵坐标 $b=\frac{x_1+x_2}{2p}x-\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}=\frac{(x_1+x_2)^2}{4p}-\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}=\frac{2x_1x_2}{4p}=\frac{-8p}{4p}=-2$.由 $a+b=-1$，得 $a=1$，所以 $M(1,-2)$，$l_{AB}:y=\frac{1}{p}x+2$，即 $x-py+2p=0$，所以点 M 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1+4p|}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以 $7p^2+16p-23=0$，解得 $p=1$ 或 $p=-\frac{23}{7}$（舍去）.

三、解答题

17. **解**：(1)由题意知 $AB=c=2b,AD=\frac{\sqrt{17}}{6}c=\frac{\sqrt{17}}{3}b$，$BD=\frac{a}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4b^2+a^2-b^2}{2\times2b\times a}=\frac{a^2+3b^2}{4ab}$； （3 分）

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{4b^2+\frac{a^2}{9}-\frac{17}{9}b^2}{2\times2b\times\frac{a}{3}}=\frac{a^2+19b^2}{12ab}$，

则 $\frac{a^2+3b^2}{4ab}=\frac{a^2+19b^2}{12ab}$，整理得 $a^2=5b^2$，

所以 $b^2+c^2=a^2$，故 $\angle BAC=90°$. （6 分）

(2)由 $a=\sqrt{5}$ 及(1)，得 $b=1,c=2$，则 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle AEC$ 中，$CE=\frac{\sqrt{5}}{3}$，由余弦定理，得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos C=1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{8}{9}$，则 $AE=\frac{2\sqrt{2}}{3}$； （9 分）

由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle AEC}=\frac{AE}{\sin C}$，

则 $\sin\angle AEC=\frac{AC}{AE}\cdot\sin C=\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

故 $\triangle ADE$ 的外接圆的直径为 $2R=\frac{AD}{\sin\angle AED}=\dfrac{\frac{\sqrt{17}}{6}c}{\sin\angle AEC}=\dfrac{\frac{\sqrt{17}}{6}\times2}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{\sqrt{170}}{9}$. （12 分）

18. **解**：(1)$\overline{x}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$，

$\overline{y}=\frac{10+12+15+16+17}{5}=14$， （2 分）

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=18$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10,\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=34$， （5 分）

所以相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=$

$\dfrac{18}{\sqrt{10}\times\sqrt{34}}=\dfrac{9}{\sqrt{85}}\approx 0.98.$ （7 分）

(2)因为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{18}{10}=1.8$， （8 分）

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=14-1.8\times4=6.8$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.8x+6.8$.

（10 分）

(3)当 $x=7$ 时，$\hat{y}=1.8\times7+6.8=19.4$.

所以估计第七天的客流量为 19.4 万. （12 分）

19. (1)**证明**：由题意可知，PE,PF,PD 三条侧棱两两互相垂直， （1 分）

因为 $PD\perp PE,PD\perp PF,PE\cap PF=P,PE,PF\subset$ 平面 PEF，

所以 $PD\perp$ 平面 PEF. （3 分）

因为 $MF\subset$ 平面 PEF，所以 $PD\perp MF$. （4 分）

(2)**解**：因为正方形的边长为 6，

所以 $PE=PF=3,PD=6$.

$V_{\text{三棱锥}P\text{-}DEF}=V_{\text{三棱锥}D\text{-}PEF}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PEF}\times PD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times6=9.$ （7 分）

又三棱锥 M-EFD 的体积为 3，

所以 $V_{\text{三棱锥}D\text{-}PMF}=V_{\text{三棱锥}D\text{-}PEF}-V_{\text{三棱锥}M\text{-}EFD}=9-3=6.$

（9 分）

设 $PM=x$，则 $V_{\text{三棱锥}D\text{-}PMF}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PMF}\times PD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times PM\times PF\times PD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times x\times3\times6=6$，

解得 $x=2$， （11 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMF$ 中，

$MF=\sqrt{PM^2+PF^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}.$ （12 分）

20. (1)**解**：由题意得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-x^2-a$， （1 分）

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2x$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-2$，

当 $h'(x)>0$，即 $\mathrm{e}^x-2>0$ 时，解得 $x>\ln 2$；

当 $h'(x)<0$，即 $\mathrm{e}^x-2<0$ 时，解得 $x<\ln 2$.

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在区间 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增， （3 分）

则 $g'(x)\geqslant g'(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，

所以函数 $f'(x)$ 是增函数. （4 分）

(2)**证明**：由题知即证 $\mathrm{e}^x-t\ln x>\dfrac{1}{3}x^3-x+1$，只需证 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{3}x^3-x-1>t\ln x-2x$， （5 分）

当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{3}x^3-x-1$，

由(1)知 $f'(x)=\mathrm{e}^x-x^2-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f'(x)>f'(0)=\mathrm{e}^0-0-1=0$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(0)=0$， （6 分）

欲证 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{3}x^3-x-1>t\ln x-2x$ 恒成立，

只需证明 $t\ln x-2x\leqslant0$ 恒成立， （7 分）

令 $\varphi(x)=t\ln x-2x,x\in(0,+\infty)$，

当 $t=0$ 时，$t\ln x-2x\leqslant0$ 恒成立； （8 分）

当 $0<t\leqslant2\mathrm{e}$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{t}{x}-2$，令 $\varphi'(x)>0$，

解得 $0<x<\dfrac{t}{2}$；令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x>\dfrac{t}{2}$，

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{t}{2}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\dfrac{t}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right)=t\ln\dfrac{t}{2}-t=t\left(\ln\dfrac{t}{2}-1\right)\leqslant0.$

（11 分）

综上，当 $t\in[0,2\mathrm{e}]$ 时，$f(x)+(a+1)x>t\ln x$.

（12 分）

21. **解**：(1)由题意设圆 M 的半径为 r，则 $|MO_1|=r+\dfrac{1}{2}$，$|MO_2|=\dfrac{7}{2}-r$，所以 $|MO_1|+|MO_2|=4>|O_1O_2|=2$，

（2 分）

故圆心 M 的轨迹是以 $O_1(-1,0)$，$O_2(1,0)$ 为焦点，4 为长轴长的椭圆，

所以 $c=1,a=2$，则 $b^2=3$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. （4 分）

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_0,y_0)$，直线 AB 的方程为 $y=kx+t$. 将 $y=kx+t$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，整理得 $(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

$\Delta=(8kt)^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)>0$，

即 $4k^2-t^2+3>0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4t^2-12}{3+4k^2}$，

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{\sqrt{64k^2t^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)}}{3+4k^2}$

$=\dfrac{\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$，

故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$.

又原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times d$

$=\frac{\sqrt{1+k^2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3+4k^2-t^2}}{3+4k^2}\times\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{(3+4k^2-t^2)t^2}}{3+4k^2}$ (6 分)

$\leqslant\frac{2\sqrt{3}\times\frac{3+4k^2-t^2+t^2}{2}}{3+4k^2}=\sqrt{3}$,

当且仅当 $3+4k^2-t^2=t^2$,即 $3+4k^2=2t^2$ (*)时,等号成立.

由 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,得 $\begin{cases}x_0=\lambda x_1+\mu x_2,\\ y_0=\lambda y_1+\mu y_2,\end{cases}$

代入 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$,整理得 $\lambda^2\left(\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}\right)+\mu^2\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}\right)+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1$,

即 $\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1$ (* *). (8 分)

而 $\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=\frac{x_1x_2}{4}+\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{3}$

$=\frac{(3+4k^2)x_1x_2+4kt(x_1+x_2)+4t^2}{12}$

$=\frac{(3+4k^2)\times\frac{4t^2-12}{3+4k^2}+4kt\times\left(-\frac{8kt}{3+4k^2}\right)+4t^2}{12}$

$=\frac{2t^2-(3+4k^2)}{3+4k^2}$,

由(*)可知 $\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=0$,代入(* *)式得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 的值为 1. (12 分)

22. **解**:(1)由 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$ 得 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$,

所以 C 的普通方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$. (2 分)

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0$ 中,

得 $3x-4y+3=0$,

所以 l 的直角坐标方程为 $3x-4y+3=0$. (4 分)

(2)由题知圆 C 的圆心 $(3,1)$,半径 $R=2$.

设点 P 到直线 l 的距离为 d,

则 $d=\frac{|3\times 2-4\times 0+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$. (6 分)

设圆心 C 到直线 l 的距离为 h,

则 $h=\frac{|3\times 3-4\times 1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{5}$, (7 分)

则 $|AB|=2\sqrt{R^2-h^2}=2\sqrt{4-\frac{64}{25}}=\frac{12}{5}$, (9 分)

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{54}{25}$. (10 分)

23. (1)**解**:因为 $|x+m|+|x+2|\geqslant|x+m-x-2|=|m-2|$,当且仅当 $(x+m)(x+2)\leqslant 0$ 时,等号成立. (2 分)

由题得 $|m-2|\geqslant 3$,解得 $m\geqslant 5$ 或 $m\leqslant -1$. (4 分)

因为 $m>0$,所以 $m\geqslant 5$,所以 $M=5$. (5 分)

(2)**证明**:由(1)知 $2a+b+c=5$,所以 $(a+b)+(a+c)=5$, (6 分)

所以 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{5}[(a+b)+(a+c)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)=\frac{1}{5}\left(2+\frac{a+c}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}\right)\geqslant\frac{1}{5}\left(2+2\sqrt{\frac{a+c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a+c}}\right)=\frac{4}{5}$, (9 分)

当且仅当 $\frac{a+c}{a+b}=\frac{a+b}{a+c}$,即 $b=c$ 时,等号成立,

故 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{4}{5}$. (10 分)