高三数学学科 参考答案及解析

选择题部分（共 60 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 答案：A

解析：因为$\frac{1}{x}>1$，所以$0<x<1$，$A=\{x|0<x<1\}$

因为$\sqrt{x}\ge\frac{1}{2}$，所以$x\ge\frac{1}{4}$，$B=\left\{x\middle|x\ge\frac{1}{4}\right\}$

所以$A\cap B=\left\{x\middle|\frac{1}{4}\le x<1\right\}$，选 A.

2. 答案：B

解析：因为$(1-2\mathrm{i})z=2\mathrm{i}^3$，所以$z=\frac{2\mathrm{i}^3}{1-2\mathrm{i}}=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$，$z=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

所以$z\cdot\overline{z}=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$. 故选$B$

3. 答案：A

解析：$\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$的展开式中通项为$T_{k+1}=C_7^k(2x)^{7-k}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_7^k2^{7-k}(-1)^kx^{7-\frac{3}{2}k}$

所以要出现常数项，$7-\frac{3}{2}k=1$或-1，

当$7-\frac{3}{2}k=1$时，$k=4$；当$7-\frac{3}{2}k=-1$时，$k=\frac{16}{3}$（舍去）

所以常数项为$C_7^42^3(-1)^4x\cdot\frac{1}{x}=280$，故选 A.

4. 答案:B

解析：若有一根$8cm$的尺子，量出长度为$1cm$到$8cm$且为整数的物体，
则当尺子有 4 个刻度时满足条件

设$x\in[1,8]$且$x\in\mathbf{N}^*$，$x=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+b_4a_4$，其中$b_1,b_2,b_3,b_4\in\{0,1\}$，

当$a_1=2,a_2=1,a_3=4,a_4=1$时，$a_2=1,a_1=2,a_1+a_2=3,a_3=4,a_2+a_3=5,a_2+a_3+a_4=6$

$a_1+a_2+a_3=7$，$a_1+a_2+a_3+a_4=8$

下证，当尺子有3个刻度时不能量出$1cm\sim8cm$的物体长度

设$x\in[1,8]$且$x\in\mathbf{N}^*$，$x=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3$，其中$b_1,b_2,b_3\in\{0,1\}$，

所以当b_1,b_2,b_3中有1个0，x的取值至多有3个

当b_1,b_2,b_3中有2个0时，$b_1=b_2=0$或$b_2=b_3=0$，x的取值至多有2个

当b_1,b_2,b_3中没有0时，x的取值有1个

所以x取值至多有6个，即当尺子有3个刻度时不能量出$1cm\sim8cm$的物体长度. 故选B

5. 答案：D

解析：若先回答问题A，则答题顺序可能为A,B,C和A,C,B，

当答题顺序为A,B,C且连对两题时，$p=0.6\times0.8\times(1-0.5)+(1-0.6)\times0.8\times0.5=0.4$

当答题顺序为A,C,B且连对两题时，$p=0.6\times0.5\times(1-0.8)+(1-0.6)\times0.5\times0.8=0.22$

所以先回答问题A，连对两题的概率为0.62

同理先回答问题B，连对两题的概率为0.52；先回答问题C，连对两题的概率为0.7

所以要使得p最大，他应该先回答问题C，故选D.

6. 答案：C

解析：设圆心$C(0,1)$到直线$y=a(x+1)$的距离为d，$d=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$

所以$AB=2\sqrt{1-d^2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot d=d\sqrt{1-d^2}$

因为$a\in(0,1)$，$d=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{1-\dfrac{2}{a+\dfrac{1}{a}}}$，所以$d\in(0,1)$

所以$S_{\triangle ABC}=d\sqrt{1-d^2}\le\dfrac{d^2+1-d^2}{2}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当$d=\sqrt{1-d^2}$，即$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2},a=2-\sqrt{3}$时等号成立故选C.

7. 答案：D

解析：因为$a=1.1=1+0.1$，所以$b-a=e^{0.1}-1-0.1$设 $f\left(x\right)=e^{x}-x-1$，$x\in\left(0,1\right)$，

则$b-a=f\left(0.1\right)$，因为 $f'\left(x\right)=e^{x}-1>0$，所以 $f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增

所以 $f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，即$b-a=f\left(0.1\right)>0$，$b>a$

因为$c-a=\dfrac{10}{9}-1.1=\dfrac{1}{90}>0$，所以再比较$b,c$的大小

因为$\dfrac{10}{9}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{-1}=\left(1-0.1\right)^{-1}$，所以$c-b=\left(1-0.1\right)^{-1}-e^{0.1}=\dfrac{1-\left(1-0.1\right)e^{0.1}}{1-0.1}$，

即比较$1,\left(1-0.1\right)e^{0.1}$大小，设$g\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{x},x\in\left(0,1\right)$

因为$g'\left(x\right)=-xe^{x}<0$，所以$g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，

所以$g\left(x\right)<g\left(0\right)=1$，即$1-g\left(0.1\right)>0$，$c>b$

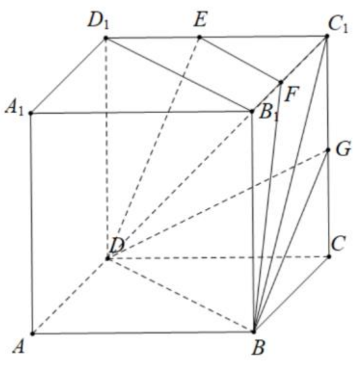
所以$c>b>a$，故选 D.

8. 答案：C

解析：平面α经过点B、D且截正方体所得截面面积最大时，平面α与面BDB_1D_1重合.

证明：设平面α与面BCD所成的二面角为θ，二面角C_1-BD-C为γ

当$\theta\in\left(\gamma,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，记平面$\alpha$截正方体所得截面为面$BDEF$，$\dfrac{C_1E}{C_1D_1}=\dfrac{C_1F}{C_1B_1}=\lambda$，$\lambda\in\left(0,1\right]$ $AB=1$



则$S_{EFBD}=\dfrac{1}{2}\left(1+\lambda\right)\sqrt{\lambda^{2}-2\lambda+3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^{2}-1\right)^{2}+2\left(1+\lambda\right)^{2}}$，令$h\left(\lambda\right)=\left(\lambda^{2}-1\right)^{2}+2\left(1+\lambda\right)^{2}$

因为$h'\left(\lambda\right)=4\lambda^{2}\left(\lambda+1\right)>0$，所以$h\left(\lambda\right)_{\max}=h\left(1\right)=2$，$\left(S_{EFBD}\right)_{\max}=S_{BDB_1D_1}=\sqrt{2}$

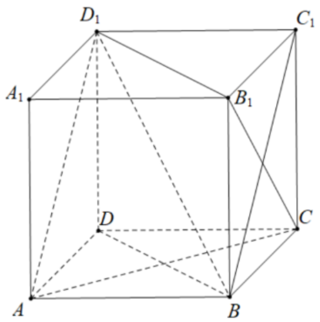
当$\theta \in (0,\gamma]$时，显然平面α截正方体所得截面面积最大时，截面为面C_1BD，$S_{\triangle C_1BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

当$\theta=0$时，平面α截正方体所得截面为$ABCD$，$S_{ABCD}=1$

所以平面α截正方体所得截面面积最大时截面为面BDB_1D_1

同理平面β过A、D_1时，截正方体所得截面面积最大时截面为面AD_1BC_1

连接BD_1，AC，B_1C，面α与面β所成锐二面角为$B_1-BD_1-C_1$



因为$B_1C\perp$面AD_1BC_1，$AC\perp$面BDB_1D_1，

所以AC,B_1C的所成角大小为二面角$B_1-BD_1-C_1$大小

因为$\angle B_1CA=60^\circ$，所以面α与面β所成锐二面角大小为60°，故选 C.

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案：ABD

解析：因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)$，所以$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

因为$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5},|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{10}$，所以$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2$，即$\triangle OAB$为直角三角形

设与$\overrightarrow{OB}$同向的单位向量为$\vec{e}$，$\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

所以$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OB}$方向上的投影向量为$|\overrightarrow{OA}|\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\vec{e}$，$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\vec{e}=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

设 $\vec{e}=\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，设与 $\vec{e}$ 垂直的单位向量为 $\vec{e_1},\vec{e_2}$

所以 $\vec{e_1}=\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$，$\vec{e_2}=\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

所以 $\vec{e_1}=(-\sin\alpha,\cos\alpha)=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$，$\vec{e_2}=(\sin\alpha,-\cos\alpha)=\left(\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

故选 ABD.

10. 答案：BD

解析：$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x$，$f'(x)=\frac{\sin x-\sin^3 x-x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\cos x(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$

令 $g(x)=\sin 2x-2x$，$x\in(0,\pi)$, 因为 $g'(x)=2\cos 2x-2\le 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减

所以 $g(x)<g(0)=0$，即 $\sin 2x-2x<0, x\in(0,\pi)$

所以当 $f'(x)=0$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$，

所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，即 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，

若 $f(x_1)=f(x_2)=a$, 设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<\frac{\pi}{2}<x_2$

要证 $x_1+x_2<\pi$，即证 $x_2<\pi-x_1$

因为 $\pi-x_1>\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，所以即证 $f(x_2)<f(\pi-x_1)$

因为 $f(x_1)=f(x_2)=a$，所以即证 $f(x_1)<f(\pi-x_1)$

令 $h(x)=f(\pi-x)-f(x)=\frac{\pi-x}{\sin x}-\frac{x}{\sin x}-2\cos x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$h'(x)=\dfrac{\cos x(2x-\pi-\sin 2x)}{\sin^2 x}$，其中 $2x-\pi-\sin 2x=-g(x)-\pi$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

所以 $2x-\pi-\sin 2x<2\cdot\dfrac{\pi}{2}-\pi-\sin\pi=0$

所以 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

所以 $h(x)>h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，即 $h(x_1)=f(\pi-x_1)-f(x_1)>0$，

所以 $f(\pi-x_1)>f(x_1)$ 成立，即 $x_1+x_2<\pi$ 成立

故选 BD.

11. 答案：BCD

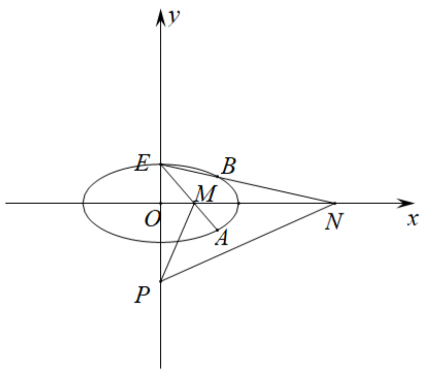
解析：因为 $A(m,n)$ 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=1$，$m^2=a^2\left(1-\dfrac{n^2}{b^2}\right)$

所以 $|AE|=\sqrt{m^2+(n-b)^2}=\sqrt{-\dfrac{c^2}{b^2}n^2-2bn+a^2+b^2}\le\dfrac{a^2}{c}$，A 错误

因为点 B 、A 关于 x 轴对称，所以 $B(m,-n)$

因为 $k_{EA}=\dfrac{n-b}{m},k_{EB}=\dfrac{b+n}{-m}$，所以

$k_{EA}\cdot k_{EB}=\left(\dfrac{n-b}{m}\right)\left(\dfrac{b+n}{-m}\right)=\dfrac{b^2-n^2}{m^2}=(b^2-n^2)\dfrac{b^2}{a^2(b^2-n^2)}=\dfrac{b^2}{a^2}$，B 正确



假设存在 P 点，使得 $\angle MPO=\angle PNO$，则 $\triangle PMO\sim\triangle PON$

所以 $OP^2=OM\cdot ON$

因为$EA: y=\frac{n-b}{m}x+b$，$EB: y=-\frac{n+b}{m}x+b$，所以$x_M=\frac{bm}{b-n}, x_N=\frac{bm}{b+n}$

所以$OP^2=OM\cdot ON=\left|\frac{bm}{b-n}\right|\left|\frac{bm}{b+n}\right|=\frac{b^2m^2}{b^2-n^2}$

因为$m^2=a^2\left(1-\frac{n^2}{b^2}\right)$，所以$OP^2=OM\cdot ON=\frac{b^2m^2}{b^2-n^2}=a^2$，即点$P$坐标为$(0,a)$或$(0,-a)$

因为$A(m,n), N\left(\frac{bm}{b+n},0\right)$，所以$k_{AN}=\frac{b+n}{m}, y=\frac{b+n}{m}(x-m)+n$

化简得$y=\frac{b+n}{m}x-b$，即直线AN过定点$(0,-b)$

故选 BCD.

12. 答案：BC

解析：因为$x^3+y^3=x-y$，所以$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x-y$，$x+y=\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

所以$(x+y)^2=\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}$

令$\frac{x}{y}=t$，因为$x^3+y^3=x-y$，$x,y>0$，所以$x-y>0$，即$t=\frac{x}{y}>1$

$(x+y)^2=\frac{t^2-1}{t^2-t+1}=1+\frac{t-2}{t^2-t+1}$，当$t=2$时，$(x+y)^2=1$

当$t>1$且$t\neq 2$时，令$u=t-2$，则$(x+y)^2=1+\frac{t-2}{t^2-t+1}=1+\frac{1}{u+\frac{3}{u}+3}$，

因为$u\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$，所以$(x+y)^2=1+\frac{1}{u+\frac{3}{u}+3}\in(0,1)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

所以$0<(x+y)^2\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x+y\le\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

因为$y<x$，所以当$x\to 0$时，$x+y<2x\to 0$，A, D 错误

因为$x^3+y^3=x-y$，所以$y^3+y+x^3-x=0$

令 $f\left(t\right)=t^3+t+x^3-x, f\left(y\right)=0$，

因为 $f\left(t\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增， $f\left(t\right)$的零点y满足$y>0$

所以 $f\left(0\right)=x^3-x<0$，解得$x<1$

所以要证$x^2+y^2<1$，即证$y<\sqrt{1-x^2}$

因为 $f\left(t\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，所以即证 $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)>0$

因为 $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+\sqrt{1-x^2}+x^3-x=\sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{x+2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{\sqrt{1-x^2}+x}\right)>0$

所以 $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)>0$成立，即$x^2+y^2<1$成立

故选 BC.

非选择题部分 （共 90 分）

三．填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案：1

解析：由正态密度函数性质可得，$a=1$

14. 答案：$2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$（答案不唯一）

解析：设 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$\left|f\left(x\right)\right|\le 2$，所以 $f\left(x\right)_{\max}\le 2, f\left(x\right)_{\min}\ge -2$

所以$\left|A\right|\le 2$，不妨设$A=2$

因为 $f\left(x\right)$最小正周期为π，所以$T=\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}$, $\omega=2$

$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，$2x+\varphi\in\left[\varphi,\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right]$

因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，所以 $\exists k_0\in\mathbf{Z}$，$\left[\varphi,\varphi+\frac{\pi}{2}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k_0\pi,\frac{\pi}{2}+2k_0\pi\right]$

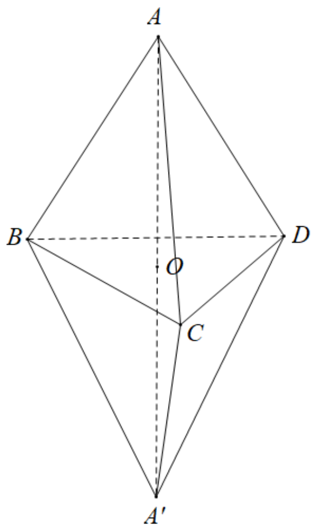
所以 $-\frac{\pi}{2}+2k_0\pi\le\varphi\le 2k_0\pi$，

当 $k_0=0$ 时，$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$，不妨设 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

所以满足条件之一的 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

15. 答案：$\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$

解析:如图所示，记两个形状完全相同的正三棱锥为三棱锥 $A-BCD$ 和三棱锥 $A'-BCD$
设点 A 在面 BCD 上的投影为点 O，则 A'、O、A 三点共线.



在三棱锥 $A-BCD$ 和 $A'-BCD$ 中，到几何体各顶点距离相等的点分别在 AO 和 $A'O$ 上
若组合后的六面体存在外接球，则 O 为外接球的球心
设 $AO=a$，则 $BO=a$，

因为 O 为 $\triangle BCD$ 的中心，所以 $BC=\sqrt{3}a$，

所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}a\right)^2\cdot a=1$，解得 $a^3=\frac{4}{\sqrt{3}}$

所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$

16. 答案：$A\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

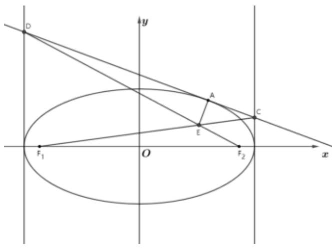
解析：设直线 l 的程 $y=kx+b$，由 $\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kbx+4b^2-4=0$

因为直线 l 与椭圆 E 相切，所以 $\Delta=\left(8kb\right)^2-4\left(4k^2+1\right)\left(4b^2-4\right)=0$，解得 $4k^2=b^2-1$

因为 $m=\dfrac{-4kb}{1+4k^2}$， $n=km+b$，所以 $n=\dfrac{b}{1+4k^2}$

所以 $\dfrac{m}{n}=-4k$，即 $k=-\dfrac{m}{4n},b=\dfrac{1}{n}$

所以直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{m}{4n}x+\dfrac{1}{n}$，即 $\dfrac{mx}{4}+ny=1$



分别令 $x=2$ 和 $x=-2$ 得，$C\left(2,\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{m}{2}\right)\right)$，$D\left(-2,\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{m}{2}\right)\right)$

所以直线 DF_2 方程为 $y=-\dfrac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{m}{2}\right)}{2+\sqrt{3}}\left(x-\sqrt{3}\right)$，直线 CF_1 方程为 $y=\dfrac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{m}{2}\right)}{2+\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)$

所以联立可得 DF_2 与 CF_1 交点 $E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}m,\left(2\sqrt{3}-3\right)n\right)$

因为 $k_{AE}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-4\right)n}{\frac{\sqrt{3}}{2}m-m}=\dfrac{4n}{m}$，所以 $k_{AE}\cdot k_l=\dfrac{4n}{m}\cdot\left(-\dfrac{m}{4n}\right)=-1$

所以由 $k_{AE}\cdot k_l=-1$，$k_{AE}+k_l=\dfrac{3}{2}$ 得 $k_l=-\dfrac{m}{4n}=-\dfrac{1}{2},k_{AE}=2$，即 $m=2n$

因为 $\dfrac{m^2}{4}+n^2=1$，所以 $m=\sqrt{2},n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $A\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

四. 解答题：本题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 答案：（1） $a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ （2） $T_n=\frac{4^n-1+6n}{9}$

解析：（1）因为$S_6-S_3=6$，所以$a_4+a_5+a_6=6$，

所以$a_4+a_5+a_6=3a_5=6$， $a_5=2$

所以$d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=\frac{1}{2}$， ……2 分 $a_n=a_3+(n-3)d=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ ……5 分

（2）因为数列$\left\{a_{m_n}\right\}$是以首项为a_1公比为4等比数列，

所以$a_{m_n}=4a_{m_{n-1}},a_{m_1}=a_1$， 即$m_1=1$

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_1+(m_n-1)d=4\left[a_1+(m_{n-1}-1)d\right]$

化简得$m_n=\frac{3a_1}{d}+4m_{n-1}-3$

因为$a_2=a_1+d=4a_1$， 所以$\frac{a_1}{d}=\frac{1}{3}$， 即$m_n=4m_{n-1}-2$ ……8 分

所以$m_n-\frac{2}{3}=4\left(m_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$，

因为$m_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$， 所以数列$\left\{m_n-\frac{2}{3}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为首项， 4为公比的等比数列

所以$m_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot(4)^{n-1}$， $m_n=\frac{1}{3}\cdot(4)^{n-1}+\frac{2}{3}$ ……8 分

所以$T_n=m_1+m_2+\cdots+m_n=\frac{1}{3}\left(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}\right)+\frac{2n}{3}=\frac{4^n-1+6n}{9}$ ……10 分

18. 答案:（1）证明见解析;（2） $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析:（1）因为$a=2c$， 所以$A>C$，即$C\neq\frac{\pi}{2}$.

因为$(1-\sin C)(1-\cos 2B)=\sin 2B\cos C$，所以$\frac{\sin 2B}{1-\cos 2B}=\frac{1-\sin C}{\cos C}$

因为$\sin^2 C+\cos^2 C=1$，所以$\frac{1-\sin C}{\cos C}=\frac{\cos C}{1+\sin C}$， 即$\frac{\sin 2B}{1-\cos 2B}=\frac{\cos C}{1+\sin C}$， ……2 分

因为$\cos C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+C\right),\sin C=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+C\right)$，所以$\frac{\sin 2B}{1-\cos 2B}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+C\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+C\right)}$ ……4 分

令 $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$， $x\in(0,2\pi)$则 $f(2B)=f\left(\frac{\pi}{2}+C\right)$

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos x-1}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调递减

所以由 $f(2B)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+C\right)$ 得 $2B=\dfrac{\pi}{2}+C$，即 $C=2B-\dfrac{\pi}{2}$ 成立……6 分

（2）由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，因为 $C=2B-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A=\pi-B-C=\dfrac{3\pi}{2}-3B$

所以 $\sin A=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3B\right)=-\cos 3B$， $\sin C=\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos 2B$

所以由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$2\cos 2B=\cos 3B$……8 分

因为 $\cos(3B)=\cos(B+2B)=\cos B\cos 2B-\sin B\sin 2B$， $\sin 2B=2\sin B\cos B,\cos 2B=2\cos^2 B-1$

所以由 $2\cos 2B=\cos 3B$ 得 $4\cos^3 B-4\cos^2 B-3\cos B+2=0$

化简得 $(2\cos B-1)(2\cos^2 B-\cos B-2)=0$

因为 $C=2B-\dfrac{\pi}{2}$， $A=\dfrac{3\pi}{2}-3B$，所以 $B\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos B\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

所以由 $(2\cos B-1)(2\cos^2 B-\cos B-2)=0$ 得 $\cos B=\dfrac{1}{2}$……10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……12 分

19. 答案:（1） $AC=2$；（2） $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析:（1）因为 $\angle BAD=\angle BAC=\angle CAD=90^\circ$， 所以 $AB\perp AC$，$AB\perp AD, AD\perp AC$

所以 $AB\perp$ 面 ACD

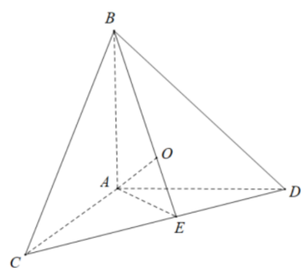
作 $AE\perp CD$， 连接 BE，因为 $AB\perp$ 面 ACD， 所以 $AB\perp CD$

因为 $AE\cap AB=A$，所以 $CD\perp$ 面 ABE

因为 $CD\subset$ 面 BCD，所以面 $ABE\perp$ 面 BCD……2 分

因为面 $ABE\perp$ 面 $BCD=BE$， 所以作 $AO\perp BE$， 可得 $AO\perp$ 面 BCD

所以 $\angle ABO$ 为 AB 与面 BCD 的所成角， $\angle ABO=45^\circ$ ……4 分



所以设 $AC=a, AB=b$，则 $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a, BC=\sqrt{a^2+b^2}, BE=\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}, AO=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

所以由 $AE\cdot AB=AO\cdot BE$ 得 $b=\frac{\sqrt{2}a}{2}$

所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot\frac{1}{2}\cdot(AC)^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，解得 $a=2$，即 $AC=2$ ……6 分

（2）设 $AC=\sqrt{2}$，由（1）得 $AB=1$

延长 CM 交 BD 于点 G，连接 AG，因为 $AC\perp AB, AC\perp AD$，所以 $AC\perp$ 面 BAD

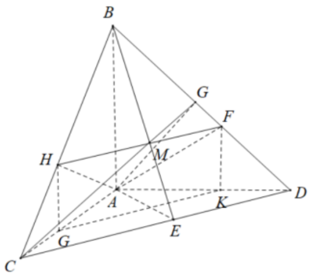
所以 $AC\perp AG$，因为 $\angle ACM=30^\circ$，所以 $AG=\frac{AC}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

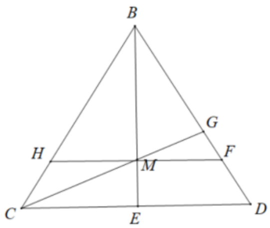
因为 $AB=1, AD=\sqrt{2}, BD=\sqrt{3}$，所以 AG 为 BD 边上的高，即 $AG\perp BD$

因为 $AC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 面 ACG ……8 分

因为 $CG\subset$ 面 ACG，所以 $BD\perp CG$

由（1）得，若 $\angle ABM=45^\circ$，则点 M 在 BE 上……10 分





所以 M 为 $\triangle BCD$ 的垂心. 因为 $BG=\frac{1}{2}GD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{BM}{BE}=\frac{1}{2}$

所以 $AH=AF=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $HF=1$，即 $S_{\triangle AHF}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

分别做 $HG\,//\,AB, FK\,//\,AB$，则 $HG\perp$ 面 ACD，$FK\perp$ 面 ACD

所以 $\triangle AFH$ 在面 ACD 的投影为 $\triangle AGK$，$S_{\triangle AGK}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{\triangle ACD}=\frac{1}{4}$

设面 $\triangle AFH$ 与面 ACD 所成的二面角为 α，则 $\cos\alpha=\frac{S_{\triangle AGK}}{S_{\triangle AHF}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……12 分

20. 答案：（1）$\overline{x}=75.801$，$\overline{y}=72.932$（2）$r\approx 0.95$（3）72.98

解析：（1）$\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=75.801$，$\overline{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=72.932$ ……2 分

（2） $\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{10}\left[x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2\right]=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-2\bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i+10\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2$

同理 $\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}y_i^2-10\bar{y}^2$

$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\bar{x}y_i-\bar{y}x_i+\bar{x}\bar{y}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}$

所以 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}}$ ……4 分

所以代入得 $r=\dfrac{55283.2-10\times75.801\times72.932}{\sqrt{(57457.98-10\times75.801^2)(53190.77-10\times72.932^2)}}\approx0.95$ ……6 分

（3） $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\dfrac{55283.2-10\times75.801\times72.932}{57457.98-10\times75.801^2}=0.23$ ……8 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=72.932-0.2294\times75.801=55.50$ ……10 分

所以 $BS3$ 号渗压计管内水位关于水库水位的经验回归方程为 $\hat{y}=0.23x+55.5$

当 $x=76$ 时，预测值为 $\hat{y}=0.23\times76+55.5=72.98$. ……12 分

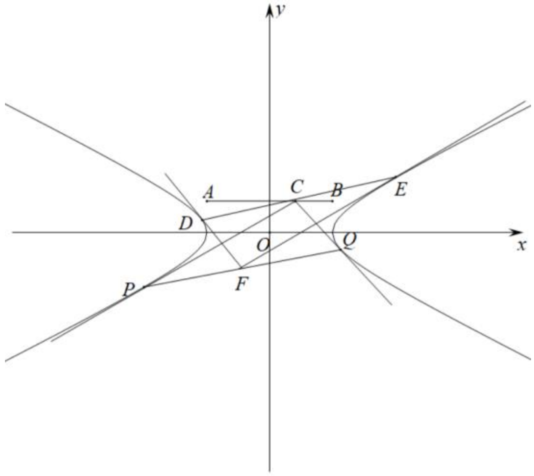
21. 答案：（1） $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ （2） $3\sqrt{3}$

解析：（1）因为双曲线 C 的右焦点为 $(\sqrt{5},0)$，所以 $c=\sqrt{5}$

因为右焦点到双曲线的渐近线的距离为1，所以 $1=\dfrac{|\sqrt{5}b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$ ……3 分

所以 $a=\sqrt{c^2-b^2}=2$，即双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ ……4 分

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),C(m,1),F\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$， $m\in(-2,2)$，设切线 PC 为 $y=kx+b$，



由$\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1 \end{cases}$得$(4k^2-1)x^2+8kbx+4b^2+4=0$，因为直线$PC$与双曲线相切，

所以$\Delta=(8kb)^2-4(4k^2-1)(4b^2+4)=0$，解得$b^2=4k^2-1$……6 分

所以$x_1=-\dfrac{8kb}{2(4k^2-1)}=-\dfrac{4k}{b}$

因为$y_1=kx_1+b$，$\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$所以$k=\dfrac{x_1}{4y_1},b=-\dfrac{1}{y_1}$，即直线$PC:\dfrac{x_1x}{4}-y_1y=1$

同理可得直线$CQ:\dfrac{x_2x}{4}-y_2y=1$……7 分

因为直线PC与直线CQ交于点C，所以$\dfrac{x_1m}{4}-y_1=1,\dfrac{x_2m}{4}-y_2=1$

所以点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$满足方程$\dfrac{mx}{4}-y=1$，即直线$PQ:\dfrac{mx}{4}-y=1$

同理可得直线$DE:\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\dfrac{x}{4}-\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)y=1$，$y=\left(\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)\dfrac{x}{4}+\dfrac{2}{y_1+y_2}$……8 分

因为点F在直线PQ上，所以$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\dfrac{m}{4}-\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=1$，即点$C(m,1)$在直线$DE$上

因为$\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1,\dfrac{x_2^2}{4}-y_2^2=1$，所以$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)\left(\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\right)$，$\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=m$

所以$k_{DE}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)=\dfrac{m}{4}=k_{PQ}$，即$DE\parallel PQ$

所以直线$DE:y=\dfrac{m}{4}(x-m)+1$……9 分

由$\begin{cases} y=\dfrac{m}{4}(x-m)+1 \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1 \end{cases}$得$(4-m^2)x^2+(2m^2-8)mx-(4-m^2)^2-16=0$

所以$DE=\sqrt{1+\left(\dfrac{m}{4}\right)^2}\dfrac{4\sqrt{(4-m^2)(8-m^2)}}{4-m^2}$

因为点F到直线DE的距离为$\dfrac{\left|\dfrac{m^2}{4}-2\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{m}{4}\right)^2}}$，所以$S_{\triangle DEF}=\dfrac{(8-m^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{4-m^2}}$……10 分

令$t=\sqrt{4-m^2}$，$m^2\in[0,4)$，$t\in(0,2]$，$S_{\triangle DEF}=\dfrac{(8-m^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{4-m^2}}=\dfrac{(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}{2t}$，$h(t)=\dfrac{(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}{2t}$

因为$h'(t)=\dfrac{(t^2+4)^{\frac{1}{2}}(t^2-2)}{t^2}$，……11 分

所以$t\in(0,\sqrt{2}),h'(t)<0,h(t)$单调递减，$t\in(\sqrt{2},2),h'(t)>0,h(t)$单调递增

所以$(S_{\triangle DEF})_{\min}=h(t)_{\min}=h(\sqrt{2})=3\sqrt{3}$.……12 分

22. 答案：（1）$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减（2）$a\in[1,+\infty)$（3）证明见解析

解析：（1）当$a=1$时，$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$……2 分

因为$e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$，所以$f'(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}-2\geq 0$……4 分

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

（2）当$x>0$时，$f(x)>0$恒成立，即$\forall x\in(0,+\infty),ae^x-ae^{-x}-2x>0$恒成立

法一：因为$f(0)=0$

所以$\exists m>0$，使得$f(x)$在$(0,m)$上单调递增

所以$x\in(0,m),f'(x)=ae^x+ae^{-x}-2>0$，

所以$f'(0)=2a-2\geq 0$，解得$a\geq 1$……6 分

下证 $a\ge 1$， $x\in(0,+\infty),ae^{x}-ae^{-x}-2x>0$恒成立

因为$ae^{x}-ae^{-x}-2x=\left(e^{x}-e^{-x}\right)a-2x$， $e^{x}-e^{-x}>0$，

所以$ae^{x}-ae^{-x}-2x\ge e^{x}-e^{-x}-2x$

设$H(x)=e^{x}-e^{-x}-2x,H'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\ge 0$，所以$H(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

所以$H(x)>H(0)=0$

所以$ae^{x}-ae^{-x}-2x\ge e^{x}-e^{-x}-2x>0$成立……8 分
所以$a\ge 1$

法二：$ae^{x}-ae^{-x}-2x=a\left(e^{x}-e^{-x}\right)-2x$，因为$x\in(0,+\infty)$，所以$e^{x}-e^{-x}>0,-2x<0$

所以由$\forall x\in(0,+\infty),ae^{x}-ae^{-x}-2x>0$恒成立得$a>0$

$f(x)=ae^{x}-ae^{-x}-2x,\ f'(x)=\dfrac{ae^{2x}-2e^{x}+a}{e^{x}}$，令$t=e^{x}$，$t\in(1,+\infty)$

则$y=at^{2}-2t+a,\Delta=4-4a^{2}$

当$\Delta=4-4a^{2}>0$，即$a\in(0,1)$时，方程$at^{2}-2t+a=0$的解为t_1,t_2，设$t_1<t_2$

因为$y=at^{2}-2t+a$的对称轴为$t=\dfrac{1}{a}>1$，$y|_{t=1}=2a-2<0$，

所以$0<t_1<1<t_2$，其中$t_2=\dfrac{2+\sqrt{4-4a^{2}}}{2a}$

则当$t\in(1,t_2)$，即$x\in(0,\ln t_2)$时$f'(x)<0,f(x)$单调递减

当$t\in(t_2,+\infty)$，即$x\in(\ln t_2,+\infty)$时$f'(x)>0,f(x)$单调递增

因为$f(0)=0$，$x\in(0,\ln t_2)$时$f(x)$单调递减

所以$x\in(0,\ln t_2),f(x)<0$，与$\forall x\in(0,+\infty),ae^{x}-ae^{-x}-2x>0$恒成立矛盾，$a\in(0,1)$舍去……6 分

当$\Delta=4-4a^{2}\le 0$，即$a\in[1,+\infty)$时，$y=at^{2}-2t+a\ge 0,f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\forall x\in(0,+\infty), ae^{x}-ae^{-x}-2x>0$ 恒成立

所以 $a\in[1,+\infty)$……8 分

（3）由（2）得 $\forall x\in(0,+\infty), e^{x}-e^{-x}-2x>0$

令 $x=\ln t$，$e^{\ln t}-e^{-\ln t}-2\ln t=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，即 $\forall t\in(1,+\infty), t-\dfrac{1}{t}-2\ln t>0$

所以当 $t=1+\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^{*}$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)$，

化简得 $\ln(1+n)-\ln n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{1+n}\right)$，$n\in\mathbf{N}^{*}$ ……10 分

因为 $m>n$，所以 $\ln\dfrac{m}{n}=\ln m-\ln n$，

所以 $\begin{cases}\ln(1+n)-\ln n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)\\ \ln(2+n)-\ln(n+1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)\\ \cdots\\ \ln m-\ln(m-1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{m}\right)\end{cases}$，

累加得 $\ln m-\ln n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{m-1}$ ……11 分

$$\ln\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m-1}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m-1}-\left[\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right]$$

化简得 $\ln\dfrac{m}{n}-\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{m-n}{2mn}$ 成立. ……12 分