

# 全国大联考

## 2023 届高三第四次联考·数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将试卷答案填在答题卷上.
3. 本试卷主要考试内容: 前 3 次联考内容, 立体几何.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 1, 2\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ 
  - A.  $\{-1, 1\}$
  - B.  $\{-2, -1\}$
  - C.  $\{-2, -1, 1\}$
  - D.  $\{-2, -1, 1, 2\}$
2. 已知复数  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = -1 + 2i$ , 则  $|\frac{z_1}{z_2}| =$ 
  - A. 1
  - B.  $2\sqrt{2}$
  - C. 2
  - D.  $\sqrt{5}$
3. 正四棱台的上、下底面边长分别为 2, 4, 侧棱长为  $\sqrt{11}$ , 则其体积为
  - A. 28
  - B.  $\frac{28}{3}$
  - C. 32
  - D. 24
4. 设  $\{a_n\}$  是首项为正数的等比数列, 公比为  $q$ , 则“ $q < -2$ ”是“对任意的正整数  $n$ ,  $a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ”的
  - A. 充要条件
  - B. 充分不必要条件
  - C. 必要不充分条件
  - D. 既不充分也不必要条件
5. 在三棱锥  $A-BCD$  中, 已知  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $BC \perp CD$ , 若  $AB = 2$ ,  $BC = CD = 4$ , 则  $AC$  与  $BD$  所成角的余弦值为
  - A.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$
  - B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
  - C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$
  - D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $a > b$ ,  $\cos(A-B) = \frac{1}{8}$ ,  $a = 10$ , 且  $\cos C = \frac{31}{32}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为
  - A.  $\frac{15}{4}$
  - B.  $\frac{15\sqrt{7}}{4}$
  - C.  $\frac{15\sqrt{7}}{2}$
  - D.  $15\sqrt{7}$

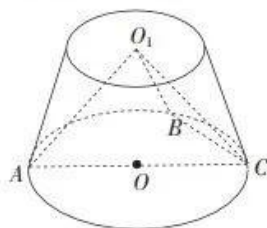
7. 在如图所示的圆台  $OO_1$  中,  $AC$  为圆  $O$  的一条直径,  $B$  为圆弧  $AC$  上靠近点  $C$  的一个三等分点, 若  $O_1A \perp O_1C$ ,  $O_1A = O_1C = 2\sqrt{2}$ , 则点  $A$  到平面  $CBO_1$  的距离为

A.  $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

B.  $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

C.  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

D.  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$



8. 设  $a = 3e^{-0.3}$ ,  $b = e^{0.6}$ ,  $c = 1.6$ , 则

A.  $a < b < c$

B.  $c < b < a$

C.  $b < a < c$

D.  $b < c < a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

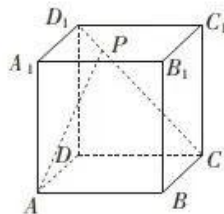
9. 如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  是线段  $CD_1$  上的动点, 则下列结论错误的是

A.  $AP \perp$  平面  $BB_1D_1$

B.  $AP \perp$  平面  $A_1BD$

C.  $AP \parallel$  平面  $A_1BC_1$

D.  $AP \parallel$  平面  $BC_1D$



10. 在通用技术课上, 某小组将一个直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  展开, 得

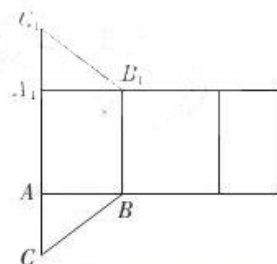
到的平面图如图所示. 其中  $AB=4$ ,  $AC=3$ ,  $BC=AA_1=5$ ,  $M$  是  $BB_1$  上的点, 则在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 下列结论正确的是

A.  $AM$  与  $A_1C_1$  是异面直线

B.  $AC \perp A_1M$

C. 平面  $AB_1C$  将三棱柱截成一个五面体和一个四面体

D.  $A_1M + MC$  的最小值是  $2\sqrt{26}$



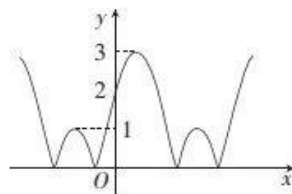
11. 已知函数  $f(x) = A\cos(2x + \varphi) - 1$  ( $A > 0, 0 < \varphi < \pi$ ), 若函数  $y = |f(x)|$  的部分图象如图所示, 则关于函数  $g(x) = A\sin(Ax - \varphi)$ , 下列结论正确的是

A. 函数  $g(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{12}$  对称

B. 函数  $g(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  对称

C. 函数  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的减区间为  $[0, \frac{\pi}{12}]$

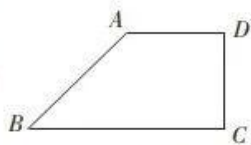
D. 函数  $g(x)$  的图象可由函数  $y = f(x) + 1$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到



12. 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=AA_1=1$ , 点  $P$  满足  $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$ , 其中  $\lambda\in[0,1], \mu\in[0,1]$ , 则下列结论错误的是
- A. 当  $\lambda=1$  时,  $\triangle AB_1P$  的周长为定值
- B. 当  $\mu=1$  时, 三棱锥  $P-A_1BC$  的体积不是定值
- C. 当  $\lambda=\frac{1}{2}$  时, 有且仅有一个点  $P$ , 使得  $A_1P\perp BP$
- D. 当  $\mu=\frac{1}{2}$  时, 有且仅有一个点  $P$ , 使得  $A_1B\perp$  平面  $AB_1P$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 如图, 梯形  $ABCD$  是水平放置的一个平面图形的直观图, 其中  $\angle ABC=45^\circ$ ,  $AB=AD=1$ ,  $DC\perp BC$ , 则原图形的面积为 \_\_\_\_\_.



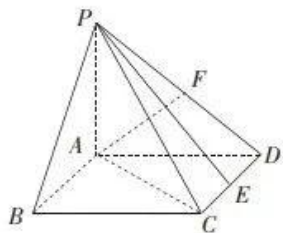
14. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知向量  $\mathbf{a}=(1,2), \mathbf{b}=(-2,-1)$ , 试写出一个非零向量  $\mathbf{c}=\underline{\hspace{2cm}}$ , 使得  $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ .
15. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $N$  为  $BC$  的中点. 当点  $M$  在平面  $DCC_1D_1$  内运动时, 有  $MN\parallel$  平面  $A_1BD$ , 则线段  $MN$  的最小值为 \_\_\_\_\_.
16. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n=n$ , 且数列  $\{\frac{a_{n+2}}{2^{n+1}a_n a_{n+1}}\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若  $T_n+(-1)^{n+1}\cdot\lambda>0$ , 则实数  $\lambda$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA\perp$  平面  $ABCD$ .  $PA=AD=1, AB=\sqrt{3}$ ,  $F$  是  $PD$  的中点, 点  $E$  在棱  $CD$  上.

- (1) 求四棱锥  $P-ABCD$  的表面积;
- (2) 求证:  $PE\perp AF$ .



18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足  $a_{n+1} + a_n = 2n + 5 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $a_1 = 3$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足  $b_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \log_{(n+1)} a_n, & n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ , 若  $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_k = 3 (k \in \mathbf{N}^*)$ , 求  $k$  的值.

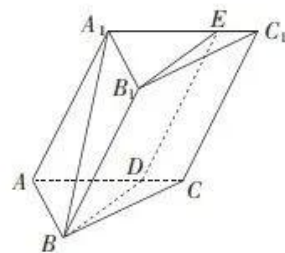
19. (12分)

如图,在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,四边形  $AA_1C_1C$  是边长为 4 的菱形,  $AB=BC=\sqrt{13}$ ,点  $D$  为棱  $AC$  上一动点(不与  $A,C$  重合),平面  $B_1BD$  与棱  $A_1C_1$  交于点  $E$ .

(1)求证:  $BB_1 \parallel DE$ .

(2)若  $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{4}$ ,从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知条件,求直线  $AB$  与平面  $B_1BDE$  所成角的正弦值. 条件①平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ; 条件②  $\angle A_1AC = 60^\circ$ ; 条件③  $A_1B = \sqrt{21}$ .

注:若选择多种组合解答,则按第一个解答计分.

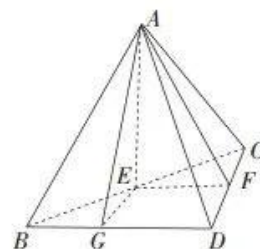


20. (12分)

如图,在三棱锥  $A-BCD$  中,  $\triangle ABC$  是正三角形,平面  $ABC \perp$  平面  $BCD$ ,  $BD \perp CD$ ,点  $E, F$  分别是  $BC, DC$  的中点.

(1)证明:  $CD \perp$  平面  $AEF$ .

(2)若  $\angle BCD = 60^\circ$ ,点  $G$  是线段  $BD$  上的动点,问:点  $G$  运动到何处时,平面  $AEG$  与平面  $ACD$  所成锐二面角的余弦值最大.



21. (12分)

图1是直角梯形 $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle D = 90^\circ$ , 四边形 $ABCE$ 是边长为2的菱形, 并且 $\angle BCE = 60^\circ$ , 以 $BE$ 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起, 使点 $C$ 到达 $C_1$ 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$ , 如图2. 来源微信公众号: 高三答案

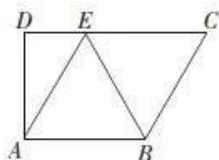


图1

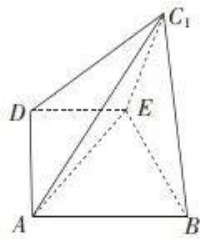


图2

(1) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$ .

(2) 在棱 $DC_1$ 上是否存在点 $P$ , 使得点 $P$ 到平面 $ABC_1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ? 若存在, 求出直线 $EP$ 与平面 $ABC_1$ 所成角的正弦值; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)

已知  $f(x) = x(\ln^2 x + 1)$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 若  $f(x_1) + f(x_2) = \frac{4}{e}$ , 且  $x_1 < x_2$ , 证明:  $\ln(x_1 + x_2) > \ln 2 - 1$ .



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线