2023 年普通高等学校招生全国统一考试适应性考试

数学答案

1.【答案】B 【详解】$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$ $\therefore$充要条件

2.【答案】A 【详解】$Z=2i(1+i)=-2+2i$，虚部为 2

3.【答案】D【详解】第一图形面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，后面的阴影部分的面积为前一个的$\dfrac{3}{4}$，$\therefore$第 n 个图中的阴影部分的面积为$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}$

4.【答案】D【详解】$T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{-2r}$

$$=C_6^r\cdot x^{6-3r}\cdot 2^{6-r}\cdot(-1)^r$$

则常数项 $r=2,\therefore T_3=C_6^2\cdot 2^4\cdot(-1)^2=240$

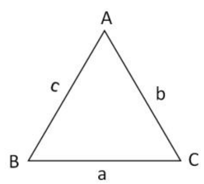
5. 【答案】C 【详解】设点$M(x,y),\because MA=2MO$ 2 $\quad\therefore(x+2)^2+y^2=48^2+4y^2$ $\therefore$动点 M 的轨迹为$3x^2+3y^2-4x-4=0$，若对$\forall R$直线$l:y=k(x-1)+b$与圆 C 恒有公共点，$\therefore(1,\ b)$在圆内部 $3+3b^2-8\le 0\Rightarrow 3b^2\le 5\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\le b\le\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

6.【答案】A【详解】不相邻插空法 $A_6^3=120$

7. 【答案】B 【详解】$\because C^2=6S$ $\therefore C^2=6\times\dfrac{1}{2}ab\sin c=3ab\sin c$，由余弦定理知：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos c\Rightarrow a^2+b^2-2ab\cos c=3ab\sin c\Rightarrow a^2+b^2=2ab\cos c+3ab\sin c$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2\cos c+3\sin c\le\sqrt{13}$$

令 $\dfrac{a}{b}=x$ $\quad x+\dfrac{1}{x}\le\sqrt{13}$ $\quad\therefore\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ $\quad\therefore\dfrac{a}{b}$最小值为$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$



8. 【答案】C 【详解】设 AB 所在直线方程为$x=ty-c,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联合$\begin{cases}x=ty\text{-}c\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$得 $\quad(6^2t^2+a^2)y^2-2b^2tcy-b^4=0$ $\quad\therefore y_1+y_2=\dfrac{2b^2+c}{b^2t^2+a^2}$ $\quad y_1y_2=\dfrac{-b^4}{b^2t^2+a^2}$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{2ab^2\cdot\sqrt{t^2+1}}{b^2t^2+a^2}$

直线 CD 方程为：$x=ty+c$ $\quad\therefore$直线AB与垂线CD的距离为 $d=\dfrac{2c}{\sqrt{1+t^2}}$ $\therefore$矩形 ABCD 的面积为

$S=|AB|\cdot d=4abc\cdot\dfrac{\sqrt{b^2t^2+b^2}}{b^2t^2+a^2}$，设$\sqrt{b^2t^2+b^2}=m\ge b$，，则$b^2t^2=m^2-b^2$

$\therefore\dfrac{\sqrt{b^2t^2+b^2}}{b^2t^2+a^2}=\dfrac{m}{m^2+c^2}=\dfrac{1}{m+\dfrac{c^2}{m}}$，要使 S 最大，则只需$\dfrac{1}{m+\dfrac{c^2}{m}}$的值最大，即$m+\dfrac{c^2}{m}$的值最小即可，

由题可知，当这个平行四边形为矩形时，其面积最大，即当 t=0 时，有 S 最大值，即 m=b 时，$m+\dfrac{c^2}{m}$的值最小，由双勾函数性质 $y=m+\dfrac{c^2}{m}$在（0，c）为减 $\quad(c,+\infty)$为增，又$m\ge b$,当$m=b$时，$m+\dfrac{c^2}{m}$有最小值，$\therefore b\ge c,\therefore b^2\ge c^2\Rightarrow b^2\ge 4-b^2\Rightarrow 2b^2\ge 4\Leftarrow b^2\ge 2,\therefore b\ge\sqrt{2}$，又

$\because 4\ge b^2\Rightarrow b<2,\therefore b\in(\sqrt{2},2)$

法二：$S=4S_{\Delta OCD},CD=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta},d_{O-CD}=c\sin\theta$，$S=4S_{\Delta OCD}=4\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}\cdot c\sin\theta$ 代入数据计算可得$b\in[\sqrt{2},2)$

9. 【答案】BD 【详解】A .以三棱锥为例，A 错误 $\quad$ C. 两个斜棱柱的组合体，C 错误

10.【答案】BC 【详解】

A. $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)\therefore P(C)$不一定为 0.2，A 错误

B. 若 A、B 相互独立，则$\overline{A},\overline{B}$也相互独立$\therefore P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))$

$$=0.4\times 0.8=0.032,\quad \text{B正确}$$

C. 如果 A,B 互斥，则 $A\cap B=\phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.2-0=0.8$，C 正确

D. 如果 $B\subseteq A$, 那么 $P(A\cup B)=0.6=P(A)$, $\mathrm{P(B/A)}=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$ D 错误

11.【答案】AB【详解】$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$

$\therefore DC \underset{=}{/\!/} EB$,由等和线意义知 $\lambda+M\in[1,2]$ ∴答案选 AB

12.【答案】BC 【详解】：A 选项：$n!<e\frac{n(n-1)}{2}$，当$n=1$时 $1!<1$不成立 ∴A错误

B 选项：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1^{n^n}(n\geq2)$，即证明$\frac{1}{n}<\ln n^{\frac{n}{n-1}}(n\geq2)$，证明，$1-t<\ln n^t$ 虽然成立，∴B 选项正确

C 选项 将$\ln x\leq x-1$ 中的 x 替换为$1+\frac{i}{n^2}$，显然$1+\frac{i}{n^2}\neq1$，$\therefore\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\frac{i}{n^2}$

故$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{n(n+1)}{2n^2}$，当

$n\geq2$时,$\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leq\frac{3}{4}$,故$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<e^{\frac{3}{4}}$ ∴C 选项正确

D 选项：将$\ln x\leq x-1$中的x替换为$\frac{n-1}{n}$ 其中，$n\in N^*$且$n\geq2$，则$\ln\frac{n-1}{n}<-\frac{1}{n}$，则

$n\cdot\ln\frac{n-1}{n}<-1$,故$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}$，则$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\frac{n}{e}$，又$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3>\frac{1}{2}>\frac{1}{e}$ ∴错误，答案为 BC

13.【答案】8【详解】 $a+b=4$,由基本不等式变形成为$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$，得$a^2+b^2\geq8$,$\therefore a^2+b^2$的最小值为 8

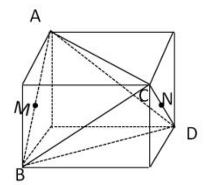
14.【答案】$\frac{65}{2}$【详解】$a_2=4,a_6=16\therefore a_n=3n-2$，插入 3 个数之后得新数列，通项$b_n=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}$，∴新数列的第 43 项为$\frac{65}{2}$

15.【答案】$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$【详解】 设双曲线另外一个焦点 F, $PF-PF_1=2a$

$PA+AF+PF=PA+PF_1+2a+5$，当 P、A、F 三点共线时，PA+PF 有最小值，

$\therefore PA+PF_1+2a+5\geq10+2a\geq18\Rightarrow a\geq4$，∴双曲线 C 的离心率取值范围为$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

16.【答案】28【详解】



取 AB、CD 的中点，由平行四边形边长和对面线的关系可得

$2(PA^2+PB^2+PC^2+PD^2)=(2PM)^2+AB^2+(2PN)^2+CD^2$
$=4(PM^2+PN^2)+AB^2+CD^2=16+4(PM^2+PN^2)$

$2(PM^2+PN^2)=MN^2+(2PO)^2=20$, $\therefore PM^2+PN^2=10$,建系也可，关键是将其放到正方体

17.【详解】（1）

$\frac{a_1-1}{a_1}\cdot\frac{a_2-1}{a_2}\cdots\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{1}{a_n}$ $\frac{a_1-1}{a_1}\cdot\frac{a_2-1}{a_2}\cdots\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_n-1}(n\geq2)$

$\Rightarrow\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{a_{n-1}}{a_n}(n\geq2)\Rightarrow a_n-a_{n-1}=1(n\geq2)$，$\therefore a_n=2+n-1=n+1$，

$\therefore\{a_n\}$通项公式为$a_n=n+1(n\geq1)$

（2）$b_n=\frac{(n+1)}{3^{n+1}}$,令$b_{n+1}=\frac{(n+2)^3}{3^{n+2}}$,则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+2)^3}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}=\frac{(n+2)^3}{3^{(n+1)^3}}>1$

$\therefore n<1.27,n\in N^*$ $\therefore n=1$, $\therefore b_2=b_1,b_2>b_3$,当 n 取 2 时，b_n 取最大值

18【详解】（1）以 O 为原点，OA、OC、OA_1 分别为 x、y、z 轴建系如图所示空间直角坐标系：A(2，0，0)，A_1(0，0，$2\sqrt{3}$)，C(0，$2\sqrt{3}$，0)，设

$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BB_1}$, $B(-2,0,0)$, $B_1(-4,0,2\sqrt{3})$, $C(-2,2\sqrt{3},2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BB_1}=(-2,0,2\sqrt{3})\Rightarrow D(-2\lambda-2,0,2\sqrt{3}\lambda)$

$\therefore\overrightarrow{A_1O}=(-2\lambda-2,0,2\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3})$ $\overrightarrow{AC_1}=(-4,2\sqrt{3},2\sqrt{3})$，又

$\because\overrightarrow{A_1D}\perp\overrightarrow{AC_1}$ $\therefore4(2\lambda+2)+2\sqrt{3}(2\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3})=0$ $\therefore\lambda=\frac{1}{5}$ $\therefore\mathrm{BD}=\frac{4}{5}$

（3）$\overrightarrow{BB_1}=(-2,0,2\sqrt{3})$ $\overrightarrow{BC}=(-2,2\sqrt{3},0)$，设平面 BCC_1B_1 的法向量为

$\vec{n}=(x,y,z)\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2\sqrt{3}z=0\\2x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$合$x=\sqrt{3}$，则

$\vec{n}=(\sqrt{3},-1,1)$, $\overrightarrow{AB_1}=(-4,0,0)$, $\cos\left\langle\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}\right\rangle=\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ $\therefore\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot\cos\left\langle\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}\right\rangle=\frac{4\sqrt{15}}{5}$ ∴点 A_1 到平面

BCC₁B₁距离为$\frac{4\sqrt{15}}{5}$

19.【详解】（1）根据列表得 $x^2=\frac{120\times 600^2}{60^2\times 9\times 30}=\frac{40}{9}\approx 4.444>3.841$，所以依据$\alpha=0.05$的独立性检验，蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐与蜜蜂种类有关联

M 品种进入黄色蜂蜡罐的频率为$\frac{2}{3}$　　M 品种进入褐色蜂蜡罐的频率为$\frac{1}{3}$

N 品种进入黄色蜂蜡罐的频率为$\frac{5}{6}$　　N 品种进入褐色蜂蜡罐的频率为$\frac{1}{6}$

依据频率分析，心中黄色蜂蜡优于褐色的占$\frac{2}{3}$，心中黄色蜂蜡优于褐色的占$\frac{5}{6}$

∴M、N 中进入黄色蜂蜡罐的与蜂蜡罐有显著差异

（2）由已知上式知，$P(A)=\frac{a}{a+b},P(B\mid A)=\frac{a-1}{a+b-1},P(\overline{A})=\frac{b}{a+b},P(B\mid A)=\frac{a}{a+b-1}$

则$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})$

$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a}{a+b}$　　$\therefore P(A)=\frac{a}{a+b}$

20.【详解】（1）$f(x)=3\sin\theta socx+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$ 为偶函数，

$\therefore 4\tan\theta-3=0\Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{4}$　$\therefore f(x)=5\sin\theta\cos x-5\sin\theta=5\sin\theta(\cos x-1)$

$\because f(x)$的最小值为$-6,\therefore -10\sin\theta=-6\Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5},\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$，$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

(2) $g(x)=\lambda f(\omega x)-f\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=3(\sin\omega x+\lambda\cos\omega x)+3-3\lambda=3\sqrt{\lambda^2+1}\sin(\omega x+4)+3-3\lambda$ 其中，

$\sin\varphi=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}>0,\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}>0$，$\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{\lambda}{2}+k_1\pi,\ k_1\in z & (a)\\ \frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi\quad k_2\in z & (b)\end{cases}$

$(a)\times 4-(b)$得 $4\varphi-\varphi=2\pi+(4k_1-k_2)\pi,k_1,k_2\in z,\varphi=\frac{2\pi+(4k_1-k_2)\pi}{3},k_1,k_2\in z$

由$\sin\varphi$与$\cos\varphi$的值分析可知，$\varphi=\frac{\pi}{3}$,由（b)-（a）式得

$\frac{\pi}{2}\omega=(k_2-k_1)\pi-\frac{\pi}{2},k_1,k_2\in z$，$\omega=2(k_2-k_1)-1,k_1,k_2\in z$,又$\because g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{24}\right]$上单调递增，

$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{24}\omega+\frac{\pi}{3}\right]\le\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$\therefore 0<\omega\le 4$，又$\because \omega=2(k_2-k_1)-1,k_1,k_2\in z,\therefore \omega=1,3$，

检验当$\omega=3$上时，代入（a）式得$\omega=k_1\pi,$，不可能使$\varphi=\frac{\pi}{3},\therefore \omega=3$（去）检验 n=1 时满足$\omega=1$，

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4\lambda^2=3(\lambda^2+1)=\lambda=\sqrt{3},\therefore \omega=1,\lambda=\sqrt{3}$

21.【详解】解（1）设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right),C\left(x_3,\frac{x_3^2}{4}\right),D\left(x_4,\frac{x_4^2}{4}\right)$，设直线 AB: $y=kx+\frac{p}{2}$，联合

$x^2=2py$得$x^2-2pkx-p^2=0,\therefore x_1+x_2=2pk,x_1x_2=-p^2$

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2p(k^2+1)$，同理可得

$|CD|=2p\left(\frac{1}{k^2}+1\right),\therefore S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AB||CD|=2p^2\left(k^2+\frac{1}{k^2}+2\right)\ge 8p^2=32$（当且仅当$k^2=1$时取等号）

$\therefore p=2$，$\therefore$抛物线的方程为$x^2=4y$

（2）当 P 为（1，1）时，$\theta(x_0,y_0)\because A、P、B$ 共线，$\therefore \frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-1}=\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-1}\Rightarrow x_1x_2+4=x_1+x_2$（a），

同理由 C、P、D 共线　$x_3x_4+4=x_3+x_4$　　（b）

由 A、C、Q 共线可得$\therefore \frac{\frac{x_1^2}{4}-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\frac{x_3^2}{4}-y_0}{x_3-x_0}\Rightarrow x_1x_3+4y_0=x_0(x_1+x_3)$　　（c）

同理由 B、D、Q 共线可得$x_2x_4+4y_0=x_0(x_2+x_4)$　　（d）

由（a）（c）得$x_1=\frac{x_2-4}{x_2-1}=\frac{x_3x_0-4y_0}{x_3-x_0}\Rightarrow (x_0-1)x_2x_3+(4-x_0)x_3+(x_0-4y_0)x_2+4y_0-4x_0=0$

（e）

由（b）（d）得

$x_4=\frac{x_3-4}{x_3-1}=\frac{x_0x_2-4y_0}{x_2-x_0}\Rightarrow (x_0-1)x_2x_3+(4-x_0)x_2+(x_0-4y_0)x_3+4y_0-4x_0=0$　　（f）

由（e）（f）得

$(4-x_0)(x_3-x_2)+(x_0-4y_0)(x_2-x_3)=0$，即

$4-x_0=x_0-4y_0$　$\therefore x_0-2y_0-2=0$ $\therefore Q$在$x-2y-2=0$上。

22.【详解】解：（1）$f(x)$的定义域为R, $f'(x)=e^x\left(x^2-ax+1\right)$,当$a\in[-2,2]$时，$x^2-ax+1\ge 0$, $\therefore f(x)$在R上单调递增，当$a\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$时，由$f'(x)=0$得

$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}, \therefore f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right),\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单增，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单减，　∴综上，当$a\in[-2,2]$时，$f(x)$在$R$上单增，当$a\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right),\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单增，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单减。

（2）法一：$\because f(x)$在$(0,2)$上有两个极值点x_1,x_2 $\therefore \begin{cases}4-2a+1>0\\ \Delta=a^2-4>0\Rightarrow 2<a<\frac{5}{2}\\ 0<\frac{a}{2}<2\end{cases}$，由韦达定理知

$x_1+x_2=a, x_1x_2=1$，

$$f(x_1)=e^{x_1}\left(x_1^2-(a+2)x_1+a+3\right)=e^{x_1}(-2x_1+a+2)$$
$$f(x_2)=e^{x_2}\left(x_2^2-(a+2)x_2+a+3\right)=e^{x_2}(-2x_2+a+2)$$

$\because a\in\left(2,\frac{5}{2}\right), \therefore x_2\in(1,2), x_1\in(0,1)$

$$f(x_1)+f(x_2)=e^{x_1}(-2x_1+a+2)+e^{x_2}(-2x_2+a+2)$$
$$=e^{x_1}\left(\frac{1}{x_1}-x_1+2\right)+e^{\frac{1}{x_1}}\left(x_1-\frac{1}{x_1}+2\right)=\left(e^{x_1}-e^{\frac{1}{x_1}}\right)\left(\frac{1}{x_1}-x_1\right)+2\left(e^{x_1}+e^{\frac{1}{x_1}}\right)\quad x_2\in(0,1)$$
，合

$$G(x)=\left(e^x-e^{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)+2\left(e^x+e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$G'(x)=e^x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)(x-1)+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}(x-1)\left(x^2-1\right)$$
$$=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^3}\left(e^{\frac{1}{x}}-x\cdot e^x\right),\quad x\in(0,1)$$
$$=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^3}e^x\left(e^{\frac{1}{x}-x}-x\right),\quad x\in(0,1)$$

令$F(x)=\frac{1}{x}-x-1nx$，$F(1)=0, \therefore F(x)>0, \therefore G'(x)>0, G(x)$在$(0,1)$为增而$G(1)=4e$

易证$f(x_1)+f(x_2)>0, \therefore\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2<4e^2$，即转化为证明$f(x_1)+f(x_2)<4e$

由上可知，结论得证$\therefore\left[\frac{-f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2<4e^2$

法二：（换 a）$g(a)=e\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\left(2+\sqrt{a^2-4}\right)+e\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\left(2-\sqrt{a^2-4}\right)$

易证$g(a)>0, g'(a)=\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4}}\left[e\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\cdot\frac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{2}-e\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\left(\sqrt{a^2-4}+a+2\right)\right]$

$g'(a)<0, \therefore g(a)$在$\left(2,\frac{5}{2}\right)$上为域，得证。

法三：$g'(a)=-\frac{e^{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}}{2}\left(a-2+\sqrt{a^2-4}\right)\left(e^{\sqrt{a^2-4}}+\frac{a-2-\sqrt{a^2-4}}{a-2+\sqrt{a^2-4}}\right)e^{\sqrt{a^2-4}}>\sqrt{a^2-4}+1$

$$\left(e^{\sqrt{a^2-4}}+\frac{a-2+\sqrt{a^2-4}}{a-2+\sqrt{a^2-4}}\right)>1+\sqrt{a^2-4}+\frac{a-2-\sqrt{a^2-4}}{a-2+\sqrt{a^2-4}}$$
$$=\frac{a-2+\sqrt{a^2-4}+\left(a-2-\sqrt{a^2-4}\right)+(a-2)\sqrt{a^2-4}+a^2-4}{a-2+\sqrt{a^2-4}}$$
$$=\frac{2(a-2)+(a-2)\cdot\sqrt{a^2-4}+a^2-4}{a-2+\sqrt{a^2-4}}>0$$

$\therefore g(a)$在$\left(2,\frac{5}{2}\right)$为域，而$g(2)=4e$得证