大联考长郡中学2024届高三月考试卷(二)

数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	B	C	A	C	D	A	B	A

1. B **【解析】**集合 $B=\{x\mid(x+1)(x-9)\leqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 9\}$,
集合 $A=\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{N}\}=\{-1,3,7,11,15,\cdots\}$,
则 $A\cap B=\{-1,3,7\}$,即元素个数为3.

2. C **【解析】**复数 $\frac{1-\mathrm{i}^{2023}}{a\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{a\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})\mathrm{i}}{-a}=\frac{-1+\mathrm{i}}{-a}=\frac{1}{a}-\frac{\mathrm{i}}{a}$,
因为其虚部为3,所以 $-\frac{1}{a}=3$,可得 $a=-\frac{1}{3}$.

3. A **【解析】**$\because \boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$,$\therefore |\boldsymbol{b}|=\sqrt{3+1}=2$,
又 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2$,
$\therefore |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=|\boldsymbol{a}|^2$,得 $|\boldsymbol{a}|=1$.
$\therefore$向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

4. C **【解析】**已知抛物线 $x^2=2py$ 的开口向上,
又 $M(x,4)$ 在 C 上,且 $|MF|=5$,
所以 $4+\frac{p}{2}=5$,解得 $p=2$,
所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

5. D **【解析】**$f'(x)=\mathrm{e}^{x-a+1}-1\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立,
所以 $x-a+1\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立,即 $a\leqslant x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立,
所以 $a\leqslant 1$.

6. A **【解析】**若直线 $l:y=kx+1$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,
则圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$,
若 $k=1$,则 $|AB|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$ 成立,即充分性成立.
若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$,则 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times 2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{|k|}{1+k^2}=\frac{|k|}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,
即 $k^2+1=2|k|$,即 $k^2-2|k|+1=0$,则 $(|k|-1)^2=0$,即 $|k|=1$,
解得 $k=\pm 1$,则 $k=1$ 不成立,即必要性不成立.
故"$k=1$"是"$\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$"的充分不必要条件.

7. B **【解析】**$\because\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,
$\therefore\sqrt{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$,
$\therefore(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)=0$,
又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha>0$,即 $\cos\alpha+\sin\alpha>0$,
所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$,因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2\alpha\in(0,\pi)$,$\sin 2\alpha>0$.
由 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 平方可得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$,即 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$,符合题意.
综上,$\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$.

8. A 【解析】由$\frac{a-2e^a}{b}=1$,得 $b=a-2e^a$,令 $f(x)=x-2e^x$,则 $f'(x)=1-2e^x$,

由$\frac{1-c}{d-1}=1$,得 $d=-c+2$,令 $g(x)=-x+2$,则$(a-c)^2+(b-d)^2$ 表示 $y=f(x)$上一点 $M(a,b)$与 $y=g(x)$上一点 $N(c,d)$的距离的平方,

设 $y=f(x)$上与 $y=g(x)$平行的切线的切点为 $M_0(x_0,y_0)$,由 $f'(x_0)=1-2e^{x_0}=-1$,解得 $x_0=0$,

所以切点为 $M_0(0,-2)$,切点到 $y=g(x)$的距离的平方为$\left(\frac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}\right)^2=8$,

即$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 8.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	CD	ACD	AC	BCD

9. CD 【解析】对于 A,∵$X\sim B(n,p)$,

∴$\begin{cases}E(X)=np=30,\\D(X)=np(1-p)=20,\end{cases}$

∴$1-p=\frac{2}{3}$,解得 $p=\frac{1}{3}$,故 A 错误;

对于 B,将数据从小到大排序为 64,72,75,76,78,79,85,86,91,92,

∵$10\times45\%=4.5$,

∴45%分位数为第 5 个数,即 78,故 B 错误;

对于 C,∵$\xi\sim N(0,1)$,

$P(-1\leqslant\xi\leqslant0)=\frac{1}{2}[1-P(\xi>1)-P(\xi<-1)]=\frac{1}{2}[1-2P(\xi>1)]=\frac{1}{2}-p$,故 C 正确;

对于 D,∵抽样比为$\frac{20}{400}=\frac{1}{20}$,

∴高二应抽取 $360\times\frac{1}{20}=18$ 人,则高三应抽取 $57-20-18=19$ 人,故 D 正确.

10. ACD 【解析】∵函数 $f(x)=2\sin x\cos x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi=\sin 2x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<\pi)$,

∴函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 A 正确;

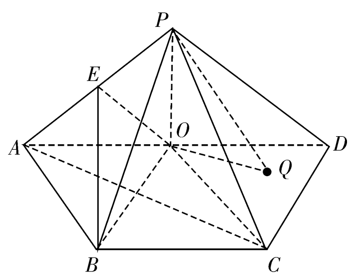
若函数 $f(x)$为偶函数,则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,故 B 错误;

若 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,则函数 $y=f(x)$的图象可由函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到,故 C 正确;

若 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,则函数 $y=f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$,求得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,

可得它的图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)$,故 D 正确.

11. AC 【解析】易证四边形 $ABCO$ 为菱形,所以 $BO\perp AC$,



连接 PO,因为 $PA=PD=\sqrt{2}$,所以 $PO\perp AD$,

因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$平面 PAD,

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$,

因为 $AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp AC$,

又 $PO\cap OB=O$,所以 $AC\perp$平面 POB.

又 $BP\subset$平面 POB,所以 $AC\perp BP$,故 A 正确;

易证$\triangle AOE$ 为等腰直角三角形,$\triangle AOB$ 为等边三角形,且平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,

所以三棱锥 B-AOE 外接球的球心为等边三角形 AOB 的中心,所以三棱锥 B-AOE 外接球的半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以三棱锥 B-AOE 外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$,故 B 错误;

因为 $PD/\!/OE$,所以$\angle CPD$ 为异面直线 PC 与 OE 所成的角(或其补角),

因为 $PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=1$，所以 $PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\sqrt{2}$，

在$\triangle PCD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle CPD=\dfrac{2+2-1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$，故 C 正确；

因为 $PO\perp$平面 $ABCD$，所以 OQ 为 PQ 在平面 $ABCD$ 内的射影，

若直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，则$\angle PQO=60^\circ$，

因为 $PO=1$，所以 $OQ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故点 Q 的轨迹是以 O 为圆心，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$为半径的半圆，

所以点 Q 的轨迹长度为$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$，故 D 错误.

12. BCD 【解析】对于 A，令 $x=y=0$，得 $f(0)=2f(0)+1$，可得 $f(0)=-1$，故 A 错；

对于 B，令 $x=y=1$，则 $f(2)=3$，令 $y=2-x$，

则 $f(2)=f(x)+f(2-x)+1\Rightarrow f(x)+f(2-x)=2$，故 B 对；

对于 C，设 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)=f(x_1-x_2+x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)+1\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)+1$，

因为 $x_1-x_2>0$，故 $f(x_1-x_2)>-1$，故 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)+1>0$，

故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 C 对；

对于 D，令 $x=n,y=1$，故 $f(n)=f(n-1)+f(1)+1\Rightarrow f(n)-f(n-1)=2$，

所以 $f(n)=f(n)-f(n-1)+f(n-1)-f(n-2)+\cdots+f(2)-f(1)+f(1)=2n-1$，

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)=\dfrac{1+(2\times2023-1)}{2}\times2023=2023^2$，故 D 对.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 40 【解析】多项式的展开式中含 x^2y^3 的项为$\dfrac{y}{x}\times C_5^2(2x)^3y^2-1\times C_5^3(2x)^2y^3=40x^2y^3$，

则 x^2y^3 的系数为 40.

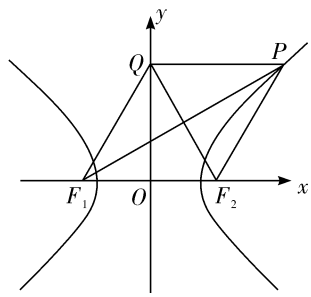
14. 366 【解析】设 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，由题意$\{b_n\}$是公差为 1 的等差数列，则 $b_1=a_1+a_2+a_3=9$，

故 $b_n=9+(n-1)\times1=n+8$，则 $b_2=b_1+1=10$，

故 $b_2+b_5+\cdots+b_{38}=(2+8)+(5+8)+\cdots+(38+8)=13\times8+\dfrac{13\times(2+38)}{2}=364$.

于是 $S_{40}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)\cdots+(a_{38}+a_{39}+a_{40})=a_1+b_2+b_5+\cdots+b_{38}=2+364=366$.

15. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ 【解析】设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$焦距为 $2c$，不妨设点 P 在第一象限，



由题意知 $PQ/\!/F_1F_2$，由$|PQ|=|F_1F_2|$且 PF_1 与 QF_2 垂直可知，四边形 PQF_1F_2 为菱形，且边长为 $2c$，而$\triangle QF_1O$ 为直角三角形，$|QF_1|=2c$，$|F_1O|=c$，

故$\angle F_1QO=30^\circ$，$\therefore\angle QF_1O=60^\circ$，则$\angle F_1QP=120^\circ$，

则$|PF_1|=2c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=2\sqrt{3}c$，$|PF_2|=2c$，

故$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}c-2c=2a$，

即离心率 $e=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

16. $2+\sqrt{2}$ 【解析】设 $SO=x$，半径 $AO_1=BO_1=r$，高 $SO_1=x+1=h>2$，

球半径 $OC=OO_1=1$，

因为$\triangle SCO\backsim\triangle SO_1A$，可得$\dfrac{OC}{SO}=\dfrac{AO_1}{SA}$，即$\dfrac{1}{x}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+(x+1)^2}}$，

所以 $xr=\sqrt{r^2+(x+1)^2}$，解得 $r^2=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{h}{h-2}$，

所以侧面积 $S=\pi r\sqrt{r^2+(x+1)^2}=\pi r^2x=\pi\dfrac{h}{h-2}(h-1)=\pi\dfrac{h^2-h}{h-2}$，

令 $f(h)=\dfrac{h^2-h}{h-2}$，可得 $f'(h)=\dfrac{h^2-4h+2}{(h-2)^2}=\dfrac{(h-2)^2-2}{(h-2)^2}$，

令 $f'(h)=0$，可得$(h-2)^2-2=0$，解得 $h=2+\sqrt{2}$.

当 $h\in(2,2+\sqrt{2})$，$f'(h)<0$，$f(h)$单调递减；

当 $h\in(2+\sqrt{2},+\infty)$，$f'(h)>0$，$f(h)$单调递增，

所以 $h=2+\sqrt{2}$时侧面积 S 取最小值.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.**【解析】**(1)由题意,$b_2=a_2,b_5=a_3,b_{14}=a_4$,$\therefore b_5^2=b_2b_{14}$,$(1+4d)^2=(1+d)(1+13d)$,解得 $d=2$,

$\therefore a_2=3,a_3=9$,$\therefore q=\dfrac{a_3}{a_2}=3,a_1=\dfrac{a_2}{q}=1$,

$\therefore b_n=1+2(n-1)=2n-1,a_n=3^{n-1}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由题意,$\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{c_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{c_n}{a_n}=b_n$, ①

$\therefore \dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{c_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{c_n}{a_n}+\dfrac{c_{n+1}}{a_{n+1}}=b_{n+1}$, ②

②−①得$\dfrac{c_{n+1}}{a_{n+1}}=b_{n+1}-b_n=2$,$\therefore c_{n+1}=2a_{n+1}$,$\therefore c_n=2a_n=2\times 3^{n-1}(n\geqslant 2)$,

当 $n=1$ 时,$c_1=1$ 不满足上式,所以 $c_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\times 3^{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_{2023}=1+2\times\left(3\times\dfrac{1-3^{2022}}{1-3}\right)=3^{2023}-2$. ………………………………………… 10 分

18.**【解析】**(1)根据题意,由正弦定理得 $2\sin A(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=2\sin A\sin(B+C)=2\sin A\sin A$ $=\sqrt{3}\sin A$,

又在锐角$\triangle ABC$ 中,有 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin A>0$,

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)结合(1)可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$,$B+C=\pi-A=\dfrac{2\pi}{3}$,

由 $a=\sqrt{3}$,则根据正弦定理有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$,

得 $b=2\sin B,c=2\sin C$,

根据余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得 $b^2+c^2=3+bc$, ………………………………………… 8 分

所以 $b^2+c^2+3bc=3+4bc=3+16\sin B\sin C=3+16\sin B\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)$

$=3+8\sqrt{3}\sin B\cos B+8\sin^2 B=7+4\sqrt{3}\sin 2B-4\cos 2B=7+8\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

又$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\dfrac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,得 $B\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $2B-\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$,所以 $\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$,

故 $b^2+c^2+3bc=7+8\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\in(11,15]$. ………………………………………………… 12 分

19.**【解析】**(1)由题知 $AA_1=2,AD=1,A_1D=\sqrt{5}$,

因为 $AD^2+A_1A^2=5=A_1D^2$,所以 $A_1A\perp AD$,

又 $B_1B\perp BC,B_1B/\!/A_1A$,所以 $A_1A\perp BC$,

又 $AD\cap BC=B$,所以 $A_1A\perp$平面 ABC,

又 $CD\subset$平面 ABC,所以 $CD\perp AA_1$,

在正三角形 ABC 中,D 为 AB 中点,于是 $CD\perp AB$,

又 $AB\cap AA_1=A$,所以 $CD\perp$平面 ABB_1A_1. ………………………………………………………… 5 分

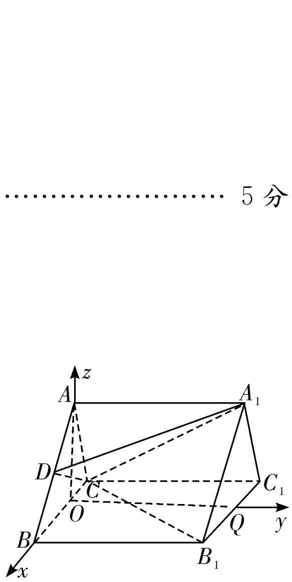
(2)取 BC 中点为 O,B_1C_1 中点为 Q,则 $OA\perp BC,OQ\perp BC$,

由(1)知 $A_1A\perp$平面 ABC,且 $OA\subset$平面 ABC,所以 $OA\perp AA_1$,

又 $B_1B/\!/A_1A$,所以 $OA\perp BB_1$,$BB_1\cap BC=B$,所以 $OA\perp$平面 BCC_1B_1,

于是 OA,OB,OQ 两两垂直,

如图,以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OA}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,则 $O(0,0,0)$,$A(0,0,\sqrt{3})$,$A_1(0,2,\sqrt{3})$,$C(-1,0,0)$,$D\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B_1(1,2,0)$,



所以$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CA_1}=(1,2,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CB_1}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,-\sqrt{3})$,

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ x+2y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=-\sqrt{3}$，$y=1$，于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,-\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=(2\lambda,2\lambda,0)$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CB_1}=(2\lambda-1,2\lambda,-\sqrt{3})$， …………… 8 分

由于直线 AP 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

于是 $|\cos\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|2\lambda-1+2\lambda+3|}{\sqrt{1+1+3}\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $|2\lambda+1|=\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+3}$，

整理得 $4\lambda^2-8\lambda+3=0$，由于 $\lambda\in[0,1]$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$， …………………………………………………… 10 分

于是 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=(1,1,0)$，

设点 P 到平面 A_1CD 的距离为 d，

则 $d=\frac{|\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1+1+3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以点 P 到平面 A_1CD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意可知，第一轮队伍 A 和队伍 D 对阵，则获胜队伍需要赢得比赛 3 的胜利，失败队伍需要赢得比赛 4 和比赛 5 的胜利，他们才能在决赛中对阵，

所以所求的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)设 W_i 表示队伍 B 在比赛 i 中胜利，L_i 表示队伍 B 在比赛 i 中失败，

设事件 E：队伍 B 获得亚军，事件 F：队伍 B 所参加的所有比赛中败了两场，

则事件 F 包括 L_2L_4，$L_2W_4L_5$，$W_2L_3L_5$，$W_2L_3W_5L_6$，$L_2W_4W_5L_6$，且这五种情况彼此互斥，

进而 $P(F)=P(L_2L_4)+P(L_2W_4L_5)+P(W_2L_3L_5)+P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$，

事件 $E\cap F$ 包括 $W_2L_3W_5L_6$，$L_2W_4W_5L_6$，且这两种情况互斥，

进而 $P(E\cap F)=P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

所以所求事件 $E|F$ 的概率为 $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$. ……………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 $|MF_1|=r_1$，$|MF_2|=r_2$，在 $\triangle MF_1F_2$ 中，设 $\angle F_1MF_2=\theta$，

由余弦定理得，$|F_1F_2|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=4c^2$，

$\therefore 2r_1r_2\cos\theta=r_1^2+r_2^2-4c^2$，又 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2})$，

$\therefore \overrightarrow{MC}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MF_1}^2+\overrightarrow{MF_2}^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2})=\frac{r_1^2}{2}+\frac{r_2^2}{2}-c^2$，

$\therefore \overrightarrow{MC}^2=\frac{r_1^2}{2}+\frac{r_2^2}{2}-c^2=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2}{2}-c^2=2a^2-c^2-5=4$， ……………………………… 3 分

$\therefore 2a^2-c^2=9$，$\because a^2=6$，$\therefore c^2=3$，$\therefore b^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=\lambda y+t$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=\lambda y+t\end{cases}$ 得 $(\lambda^2+2)y^2+2t\lambda y+t^2-6=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\frac{2t\lambda}{\lambda^2+2}$，$y_1y_2=\frac{t^2-6}{\lambda^2+2}$，$x_1=\lambda y_1+t$，$x_2=\lambda y_2+t$，

$x_1+x_2=\frac{4t}{\lambda^2+2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-6\lambda^2}{\lambda^2+2}$， ………………………………………………………………… 7 分

设 $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\frac{(y_0-y_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_2)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$=\dfrac{2x_0y_0\lambda^2+(2tx_0-12)\lambda+4y_0(x_0-t)}{(x_0^2-6)\lambda^2+2(x_0-t)^2}=p$,

若 p 为常数，则 $2tx_0-12=0$，…………………………………………………………………… 10 分

即 $tx_0=6$，而此时 $\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-6}=\dfrac{4y_0(x_0-t)}{2(x_0-t)^2}=\dfrac{2y_0}{x_0-t}$ 恒成立，

又 $-\sqrt{6}<x_0<\sqrt{6}$，$\therefore -\sqrt{6}<\dfrac{6}{t}<\sqrt{6}$，即 $t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，

综上所述，$t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，存在点 $A\left(\dfrac{6}{t},\pm\sqrt{3-\dfrac{18}{t^2}}\right)$，使得直线 AP 的斜率与直线 AQ 的斜率之和为定值 $\dfrac{2y_0}{x_0-t}$. …………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

由已知得，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+x-a-1=\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$.

①当 $0<a<1$ 时，

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $a<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

②当 $a=1$ 时，

当 $x>0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增.

③当 $a>1$ 时，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $1<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上，①当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，$(a,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$(1,a)$ 上单调递减，$(a,+\infty)$ 上单调递增. ………………… 3 分

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}$.

由(1)知，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增且 $f(1)=0$；

令 $g(x)=f(x)+f(2-x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}+\ln(2-x)+\dfrac{1}{2}(2-x)^2-2(2-x)+\dfrac{3}{2}$

$=\ln[x(2-x)]+x^2-2x+1=\ln[1-(x-1)^2]+(x-1)^2$，

令 $F(x)=\ln x-x+1(x>0)$，$F'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

令 $F'(x)>0$，解得 $0<x<1$；令 $F'(x)<0$，解得 $x>1$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)\leqslant F(1)=0$，所以 $\ln x\leqslant x-1$，所以 $\ln(1-t)\leqslant 1-t-1$.

令 $(x-1)^2=t\in[0,1)$，则 $\ln(1-t)+t\leqslant 1-t-1+t=0$，

所以 $g(x)=f(x)+f(2-x)\leqslant 0$ 恒成立，

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，则 $f(x_1)+f(2-x_1)\leqslant 0$，

所以 $-f(x_1)\geqslant f(2-x_1)$，所以 $f(x_2)\geqslant f(2-x_1)$，

所以 $x_2\geqslant 2-x_1$，所以 $x_1+x_2\geqslant 2$. …………………………………………………………… 7 分

(3)由(2)知，$x>1$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}>f(1)=0$，

即 $2\ln x+x^2-4x+3=2\ln x+(x-2)^2-1>0$，

故 $2\ln x+(x-2)^2>1$ 在 $x>1$ 时恒成立，

所以 $2\ln\dfrac{2}{1}+(2-2)^2=2\ln\dfrac{2}{1}+\left(\dfrac{0}{1}\right)^2>1$，

$2\ln\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2=2\ln\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2>1$，

$2\ln\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2=2\ln\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2>1$，…，

$2\ln\dfrac{n+1}{n}+\left(\dfrac{n+1}{n}-2\right)^2=2\ln\dfrac{n+1}{n}+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2>1$，

相加得 $2\ln(n+1)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i-1}{i}\right)^2>n$. …………………………………………………… 12 分