高三数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$N=\{0,1,4,9\}$，$P=M\cap N$，则 P 的子集共有

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

2. 若 z 满足 $i(z-1)=4-6i$，则 z 的虚部是

A. -4　　B. $-4i$　　C. -5　　D. $-5i$

3. 已知 $a=\ln 2$，$b=(\frac{1}{e})^{-2.1}$，$c=\ln\frac{2}{3}$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

4. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a}+y^2=1(a>1)$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，若 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为 2，则 $a=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. 16

5. 如图，E，F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 的中点，将△CEF 沿着 EF 折起到△PEF 的位置，使平面 $PEF\perp$平面 $ABCD$，连接 AP，BF，则 AP，BF 所成角的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 高一(1)班有 8 名身高都不相同的同学去参加红歌合唱，他们站成前后对齐的 2 排，每排 4 人，则前排的同学都比后排对应的同学矮的概率为

A. $\frac{1}{384}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{16}$

7. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 $\sqrt{7}a$，底面边长为 a，则它的内切球的半径为

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}a$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{15}a$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{5}a$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{20}a$

8. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(3x+1)$ 是奇函数，$f(2x-1)$ 是偶函数，则下列结论错误的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

C. $f(1)=1$

D. $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 秋季开学前，某学校要求学生提供由当地社区医疗服务站或家长签字认可的返校前一周(7 天)的体温测试记录，已知小明在一周内每天自测的体温(单位：℃)依次为 36.0，36.2，36.1，36.4，36.3，36.1，36.3，则该组数据的

A. 极差为 0.4 ℃

B. 平均数为 36.2 ℃

C. 中位数为 36.1

D. 第 75 百分位数为 36.3 ℃

10. 已知向量 $m=(\sqrt{3},1)$，$n=(\cos 2x,\sin 2x)$，函数 $f(x)=m\cdot n$，则

A. $f(x)$ 的最大值为 2

B. 直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$ 上单调递减

11. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与抛物线 C 相交于 A，B 两点，下列结论正确的是

A. 若 $A(4,4)$，则 $|AF|=5$

B. 若 $E(2,3)$，则 $|AE|+|AF|$ 的最小值为 5

C. 以线段 AB 为直径的圆与直线 $y=-1$ 相切

D. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 AB 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，G 为 CD 的中点，点 P 在线段 BC_1 上运动，点 Q 在棱 BC 上运动，M 为空间中任意一点，则下列结论正确的有

A. 异面直线 DP 与 AD_1 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

B. $PQ+QG$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$

C. 若 $3BP=2PC_1$，则平面 AGP 截此正方体所得截面的面积是 $3\sqrt{21}$

D. 若 $MA+MD=8$，当三棱锥 $A-MBD$ 的体积最大时，其外接球的表面积为 $\frac{112\pi}{3}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 a，b 满足 $|b|=2$，且 $a\perp(a-2b)$，则 $|a-b|=$ ▲ .

14. 已知动点 M 与两个定点 $A(0,-1)$，$B(0,3)$ 的距离之比为 $1:3$，则动点 M 的轨迹方程为 ▲ .

15. 干支纪年是中国古代的一种纪年法．分别排出十天干与十二地支如下：

天干：甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

地支：子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

把天干与地支按以下方法依次配对：把第一个天干"甲"与第一个地支"子"配出"甲子"，把第二个天干"乙"与第二个地支"丑"配出"乙丑"，…，若天干用完，则再从第一个天干开始循环使用，若地支用完，则再从第一个地支开始循环使用．已知 2022 年是壬寅年，则 13^3 年以后是___▲___年．

16. 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+b$，给出以下说法：

①当 $f(x)$ 有三个零点时，b 的取值范围为 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$；

② $g(x)=|f(x)-b|$ 是偶函数；

③设 $f(x)$ 的极大值为 M，极小值为 m，若 $M+m=2$，则 $b=2$；

④若过点 $P(1,1)$ 可以作 $f(x)$ 图象的三条切线，则 b 的取值范围为 $(0,\frac{1}{3})$．

其中所有正确说法的序号为___▲___．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $\cos B=\frac{4}{5}$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 24．

（1）求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$；

（2）若 $c=\frac{5}{4}a$，求 b．

18.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_{n+1}=4a_n$，且 $a_1=2$．

（1）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明：$\{b_n\}$ 是等比数列．

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

19.(12分)

甲、乙两个同学去参加学校组织的百科知识大赛,规则如下:甲先答2道题,至少答对1道题,乙同学才有机会答题,乙同样答2道题.每答对1题可以得50分,已知甲答对每道题的概率都是p,乙答对第1道题的概率为$\frac{4}{5}$,答对第2道题的概率为$\frac{2}{3}$,乙有机会答题的概率为$\frac{21}{25}$.

(1)求p;

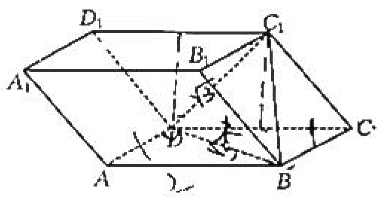
(2)求甲与乙总得分X的分布列与数学期望.

20.(12分)

如图,四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是一个平行四边形,且$AD=1,BD=\sqrt{3},\angle ADB=\frac{\pi}{2}$,点$C_1$在平面$ABCD$内的射影恰好为点$B$.

(1)证明:$BC\perp C_1D$.

(2)若$BC_1=1$,求平面BC_1D与平面CC_1D夹角的余弦值.



21.(12分)

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率是2,直线$l$过双曲线$C$的右焦点$F$,且与双曲线$C$的右支交于$A,B$两点.当直线$l$垂直于$x$轴时,$|AB|=6$.

(1)求双曲线C的标准方程.

(2)记双曲线C的左、右顶点分别是D,E,直线AD与BE交于点P,试问点P是否恒在某直线上?若是,求出该直线方程;若不是,请说明理由.

22.(12分)

已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x-a$.

(1)若$f(x)$恰有一个零点,求a的取值范围;

(2)若$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)(x_1<x_2<x_3)$,证明:$x_3-x_1<2$.

密 封 线 内 不 要 答 题

高三数学参考答案

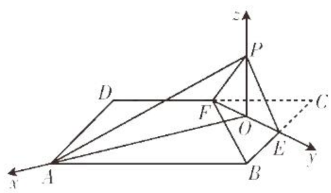
1. B　因为 $P=M\cap N=\{1,4\}$，所以 P 的子集共有 $2^2=4$ 个.

2. A　因为 $z=\frac{4-6i}{i}+1=-5-4i$，所以 z 的虚部是 -4.

3. D　因为 $a=\ln 2\in(0,1)$，$b=(\frac{1}{e})^{-2.1}>1$，$c=\ln\frac{2}{3}<0$，所以 $b>a>c$.

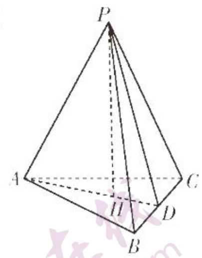
4. B　根据椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{a}$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2})^2=a=2$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

5. C　设 EF 的中点为 O，连接 OA，OP，以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系. 设 $OE=1$，则 $A(3,0,0)$，$B(1,2,0)$，$F(0,-1,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(-3,0,1)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,-3,0)$. 设 AP，BF 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BF}|}=\frac{3}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{3}{10}$.



6. D　8 名身高都不相同的同学站在 8 个不同的位置有 A_8^8 种站法，前排的同学都比后排对应的同学矮有 $C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2$ 种站法，故所求概率 $P=\frac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_8^8}=\frac{1}{16}$.

7. B　如图，D 为 BC 的中点，$PH\perp$ 底面 ABC，则 H 为 $\triangle ABC$ 的中心，底面 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$，又 $AH=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$PA=\sqrt{7}a$，所以 $PH=\frac{2\sqrt{15}}{3}a$，$PD=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.
设三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的半径为 r，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\times\frac{2\sqrt{15}}{3}a=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}+\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\times3)r$，所以 $r=\frac{\sqrt{15}}{15}a$.



8. C　因为 $f(3x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-3x+1)+f(3x+1)=0$，令 $t=3x$，则 $f(-t+1)+f(t+1)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$f(1)=0$；同理，由 $f(2x-1)$ 是偶函数，可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称；函数 $f(x)$ 是周期函数，周期为 8. 故选 C.

9. ABD　体温从低到高依次为 36.0，36.1，36.1，36.2，36.3，36.3，36.4，
极差为 $36.4-36.0=0.4$ ℃，故 A 正确；
平均数为 $\frac{36+36.2+\cdots+36.3}{7}=36.2$ ℃，故 B 正确；
中位数为 36.2 ℃，故 C 错误；
因为 $7\times75\%=5.25$，所以体温的第 75 百分位数为从小到大排列的第 6 个数，是 36.3 ℃，故 D 正确.

10. ACD　因为 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，所以 $f(x)$ 的最大值为 2，A 正确；因为 $\sin(-2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})\neq\pm1$，$\sin(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$，所以 B 错误，C 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 D 正确.

11. AC　易知抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$.
对于 A，由 $A(4,4)$，得 $|AF|=4+1=5$，A 正确.
对于 B，$|AE|+|AF|\geqslant|AE|+y_A+1=y_E+1=4$，B 错误.
对于 C，设点 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，联立方程 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，$y_1+y_2=4k^2+2$，

则 $|AB|=y_1+y_2+2=4k^2+4$，线段 AB 的中点为 $G(2k,2k^2+1)$，

点 G 到直线 $y=-1$ 的距离为 $d=2k^2+2=\frac{1}{2}|AB|$，所以以 AB 为直径的圆与直线 $y=-1$ 相切，C 正确.

对于 D，因为 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以 $(-x_1,1-y_1)=3(x_2,y_2-1)$，可得 $3x_2=-x_1$. 由 $\begin{cases}x_1+x_2=4k,\\x_1x_2=-4,\\3x_2=-x_1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2=-2k,\\-3x_2^2=-4,\end{cases}$ 解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，D 错误.

12. ACD　对于 A，如图 1，易知四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $AD_1 /\!/ BC_1$，所以 DP 与 AD_1 所成角即为异面直线 DP 与 BC_1 所成的角或补角. 又点 P 在线段 BC_1 上运动，可知 $\triangle BC_1D$ 是等边三角形，所以直线 DP 与 AD_1 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$，A 正确.

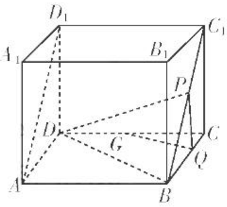


图 1

对于 B，如图 2，展开平面 C_1CBB_1，使平面 C_1CBB_1 与平面 $ABCD$ 共面，过 G 作 $GP\perp BC_1$，交 BC_1 于点 P，交 BC 于点 Q，则此时 $PQ+QG$ 最小，由题可知，$C_1G=6$，则 $GP=3\sqrt{2}$，即 $PQ+QG$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$，B 错误.

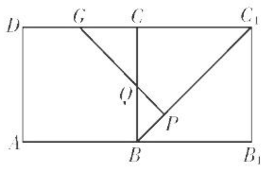


图 2

对于 C，如图 3，平面 AGP 截此正方体所得截面 $AGFE$，所以 $GF /\!/ AE$，作 $DH /\!/ AE$，则 $\angle HDC=\angle EAB$，$AB=CD$，$\angle DCH=\angle ABE$，所以 $\triangle DCH\cong\triangle ABE$，则 $BE=CH=2CF$. 又因为 $\triangle BEP\backsim\triangle C_1FP$，所以 $\frac{BP}{PC_1}=\frac{BE}{C_1F}=\frac{2}{3}$，所以 $FC_1=3CF$，则 $BE=2CF=2$，$AG=2\sqrt{5}$，$AE=2GF=2\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{17}$，可求出 $S_{AGFE}=3\sqrt{21}$，C 正确.

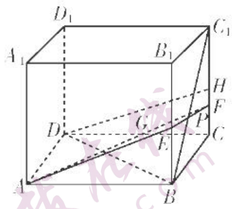


图 3

对于 D，如图 4，因为 $MA+MD=8$，所以在一个平面内，点 M 的轨迹是以 A,D 为焦点的椭圆. 又因为 $AB=4$，所以该椭圆的长轴长为 8，短轴长为 $4\sqrt{3}$，故点 M 的轨迹是以 A,D 为焦点的椭球表面.

设 AD 的中点为 L，要使三棱锥 $A-MBD$ 的体积最大，即 M 到平面 ABD 的距离最大，所以当 $M\in$ 平面 ADD_1A_1，且 $ML\perp$ 平面 ABD 时，三棱锥 $A-MBD$ 的体积最大，此时 $ML=2\sqrt{3}$，$\triangle MAD$ 为等边三角形，设其中心为 S，三棱锥 $A-MBD$ 的外接球的球心为 O，$\triangle ABD$ 的外心为 K，连接 OK,OB,OS，则 $OK=SL=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BK=2\sqrt{2}$，所以 $BO^2=BK^2+OK^2=\frac{28}{3}$，此时三棱锥 $A-MBD$ 外接球的表面积 $S=4\pi\times OB^2=\frac{112\pi}{3}$，D 正确.

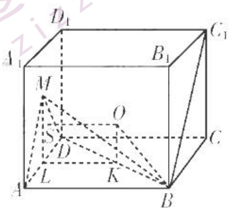


图 4

13. 2　因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

14. $x^2+y^2+3y=0$　设点 $M(x,y)$，则 $\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}=\frac{1}{3}$，整理得 $x^2+y^2+3y=0$，所以动点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2+3y=0$.

15. 癸卯　因为 $13^8=(12+1)^8=12^8+C_8^1\times12^7+\cdots+C_8^7\times12+1$，所以 13^8 年以后地支为“寅”后面的“卯”. 因为 $13^8=(10+3)^8=10^8+C_8^1\times10^7\times3+\cdots+C_8^7\times10\times3^7+3^8$，$3^8=6561$，$3^8$ 除以 10 余数为 1，所以 13^8 年以后天干为“壬”后面的“癸”，故 13^8 年以后是癸卯年.

16. ①②④　由 $f'(x)=-x^2+1=-(x+1)(x-1)$，可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-1,1)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{2}{3}+b$，极大值为 $\frac{2}{3}-b$.

当 $f(x)$ 有三个零点时，则 $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}+b<0, \\ \dfrac{2}{3}+b>0, \end{cases}$ 解得 $-\dfrac{2}{3}<b<\dfrac{2}{3}$，①正确.

$g(x)=|f(x)-b|=\left|-\dfrac{1}{3}x^3+x\right|$，显然是偶函数，②正确.

由 $-\dfrac{2}{3}+b+\dfrac{2}{3}+b=2$，得 $b=1$，③错误.

设切点为 (x_0,y_0)，$y_0=-\dfrac{1}{3}x_0^3+x_0+b$，则切线的斜率为 $-x_0^2+1=\dfrac{y_0-1}{x_0-1}=\dfrac{-\frac{1}{3}x_0^3+x_0+b-1}{x_0-1}$，化简得 $b=-\dfrac{2}{3}x_0^3+x_0^2$.

设 $h(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+x^2-b$，则 $h'(x)=-2x^2+2x=-2x(x-1)$，可得 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是减函数，在 $(0,1)$ 上是增函数，可知 $h(x)$ 的极小值为 $h(0)=-b$，极大值为 $h(1)=\dfrac{1}{3}-b$，所以当 $0<b<\dfrac{1}{3}$ 时，$-\dfrac{2}{3}x_0^3+x_0^2-b=0$ 有三个实数根，即 $f(x)$ 存在三条切线，所以④正确. 故所有正确说法的序号为①②④.

17．解：(1) 因为 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin B=\dfrac{3}{5}$. …… 1分

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 24，所以 $\dfrac{1}{2}ac\times\dfrac{3}{5}=24$，即 $ac=80$, …… 3分

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos B=80\times\dfrac{4}{5}=64$. …… 5分

(2) 由 (1) 知 $ac=80$，又 $c=\dfrac{5}{4}a$, …… 7分

所以 $\dfrac{5a^2}{4}=80$，解得 $a=8$，从而 $c=10$, …… 8分

所以 $b^2=8^2+10^2-2\times8\times10\times\dfrac{4}{5}=36$，解得 $b=6$. …… 10分

18．(1) 证明：因为 $S_{n+1}=4a_n$，所以 $S_n=4a_{n-1}\ (n\geqslant2)$, …… 1分

两式相减得 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$, …… 2分

所以 $a_{n+1}-2a_n=2a_n-4a_{n-1}=2(a_n-2a_{n-1})$，即 $b_n=2b_{n-1}\ (n\geqslant2)$, …… 4分

所以 $\{b_n\}$ 是等比数列. …… 5分

(2) 解：由 $a_1=2$，$S_{n+1}=4a_n$，可得 $a_2=6$. …… 6分

由 (1) 可知 $a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot2^{n-1}=2^n$, …… 8分

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{2a_n}{2^{n+1}}=\dfrac{2^n}{2^{n+1}}$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$, …… 10分

所以 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列, …… 11分

所以 $\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$，则 $a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$. …… 12分

19．解：(1) 甲先答 2 道题，至少答对 1 道题，乙才有机会答题，且乙有机会答题的概率为 $\dfrac{21}{25}$，所以 $1-(1-p)^2=\dfrac{21}{25}$, …… 2分

所以 $(1-p)^2=\dfrac{4}{25}$，解得 $p=\dfrac{3}{5}$. …… 4分

(2) 随机变量 X 的可能取值为 0，50，100，150，200. …… 5分

则 $P(X=0)=(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$. ………………………………………… 6分

$P(X=50)=C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{125}$. ………………………………………… 7分

$P(X=100)=(\frac{3}{5})^2\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times(\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})=\frac{27}{125}$. ………………………… 8分

$P(X=150)=(\frac{3}{5})^2\times(\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})+C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$. ………………………… 9分

$P(X=200)=(\frac{3}{5})^2\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{24}{125}$. ………………………………………… 10分

所以 X 的分布列为

X	0	50	100	150	200
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{27}{125}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{125}$

………………………………………… 11分

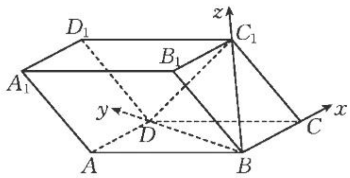
则 $E(X)=0\times\frac{4}{25}+50\times\frac{4}{125}+100\times\frac{27}{125}+150\times\frac{2}{5}+200\times\frac{24}{125}=\frac{608}{5}$. ………………………… 12分

20.(1)证明:因为底面 $ABCD$ 是平行四边形,且 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$,所以 $BD\perp BC$. ………………………… 1分

又点 C_1 在平面 $ABCD$ 内的射影恰好为点 B,所以 $BC_1\perp BC$. …… 2分

因为 $BC_1\cap BD=B$,所以 $BC\perp$ 平面 BC_1D. ………………………… 3分

而 $C_1D\subset$ 平面 BC_1D,所以 $BC\perp C_1D$. ………………………… 4分



(2)解:因为点 C_1 在平面 $ABCD$ 内的射影恰好为点 B,所以 $BC_1\perp BD$, $BC_1\perp BC$. 如图,以 B 为原点,$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系. ………………………………………… 5分

$C(1,0,0),D(0,\sqrt{3},0),C_1(0,0,1),\overrightarrow{CD}=(-1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{CC_1}=(-1,0,1)$. ………………………… 7分

设平面 CC_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

不妨令 $y=1$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$. ………………………………………… 9分

易知平面 BC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ………………………………………… 10分

设平面 BC_1D 与平面 CC_1D 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

即平面 BC_1D 与平面 CC_1D 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 12分

21.解:(1)由题意可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=2,\\ \frac{2b^2}{a}=6,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=\sqrt{3}$. ………………………………………… 3分

故双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4分

(2)由(1)可知 $F(2,0),D(-1,0),E(1,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由题意可知直线 l 的斜率不为0,设直线 $l:x=my+2$,

联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$, ………………………………………… 5分

$\Delta=144m^2-36(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$,

则 $y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$, $y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$, 故 $-4my_1y_2=3(y_1+y_2)$. ………………………… 7 分

由题意可得直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$, 直线 BE 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$. ……………… 8 分

则 $(x_2-1)y_1(x+1)=(x_1+1)y_2(x-1)$, 即 $(y_1-3y_2)x=-2my_1y_2-y_1-3y_2=\frac{1}{2}(-4my_1y_2-2y_1-6y_2)$. ………………………… 9 分

把 $-4my_1y_2=3(y_1+y_2)$ 代入上式, 得 $(y_1-3y_2)x=\frac{1}{2}[3(y_1+y_2)-2y_1-6y_2]=\frac{1}{2}(y_1-3y_2)$,

解得 $x=\frac{1}{2}$. ………………………… 11 分

故点 P 在定直线 $x=\frac{1}{2}$ 上. ………………………… 12 分

22. (1)解: 因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x-a$, 所以 $f'(x)=x-3+\frac{2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$. ……………… 1 分

当 $x<1$ 或 $x>2$ 时, $f'(x)>0$; 当 $1<x<2$ 时, $f'(x)<0$.
所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 与 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(1,2)$ 上单调递减.

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-\frac{5}{2}-a$, $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-4+2\ln 2-a$. ……………… 3 分

因为 $f(x)$ 恰有一个零点, 所以 $-\frac{5}{2}-a<0$ 或 $-4+2\ln 2-a>0$,

解得 $a>-\frac{5}{2}$ 或 $a<-4+2\ln 2$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty,-4+2\ln 2)\cup(-\frac{5}{2},+\infty)$. ……………… 5 分

(2)证明: 由(1)可知 $0<x_1<1<x_2<2<x_3$.
设 $g(x)=f(x)-f(2-x)(1<x<2)$,

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x}+\frac{x(x-1)}{2-x}=\frac{4(x-1)^2}{x(2-x)}$. ……………… 6 分

因为 $1<x<2$, 所以 $x(2-x)>0$, 所以 $g'(x)>0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立, 则 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增.
故 $g(x)>g(1)=0$, 即 $f(x)>f(2-x)$ 对一切 $x\in(1,2)$ 恒成立. ……………… 7 分
因为 $x_2\in(1,2)$, 所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$.
因为 $f(x_1)=f(x_2)$, 所以 $f(x_1)>f(2-x_2)$.
因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 且 $x_1, 2-x_2\in(0,1)$, 所以 $x_1>2-x_2$, 即 $x_1+x_2>2$. ……………… 8 分
设 $h(x)=f(x)-f(4-x)(1<x<2)$,

则 $h'(x)=f'(x)+f'(4-x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x}+\frac{(x-2)(x-3)}{4-x}=\frac{2(x-2)^2}{x(4-x)}$. ……………… 9 分

因为 $1<x<2$, 所以 $x(4-x)>0$, 所以 $h'(x)>0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增.
故 $h(x)<h(2)=0$, 即 $f(x)<f(4-x)$ 对一切 $x\in(1,2)$ 恒成立. ……………… 10 分
因为 $x_2\in(1,2)$, 所以 $f(x_2)<f(4-x_2)$.
因为 $f(x_2)=f(x_3)$, 所以 $f(x_3)<f(4-x_2)$.
因为 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 且 $x_3, 4-x_2\in(2,+\infty)$, 所以 $x_3<4-x_2$, 即 $x_2+x_3<4$. ……… 11 分
因为 $x_1+x_2>2$, 所以 $-(x_1+x_2)<-2$, 所以 $x_3-x_1<2$. ……………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。