

2023 届高三第十三次模考数学 (理科) 试卷

第 I 卷 选择题 (共 60 分)

本试卷共 4 页, 23 题 (含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

一、选择题: (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。请将正确的答案填涂在答题卡上。)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2 < 0\}$, 且 $a \in A$, 则 a 可以为 ()

- A. -2 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

2. 在复平面内, 复数 $\frac{z}{i}$ 对应的点的坐标是 $(3, -1)$, 则 $z =$ ()

- A. $1+3i$ B. $3+i$ C. $-3+i$ D. $-1-3i$

3. 下列函数中是增函数的为 ()

- A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4. 已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$. 若直线 $y = kx - 2$ 上存在点 P , 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\sqrt{3}]$ B. $[\sqrt{3}, +\infty)$ C. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ D. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{6}$, $b = 2c$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ ()

- A. $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ B. 4 C. $\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{15}$

6. 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2, 则 $f'(4) =$ ()

- A. -1 B. $\frac{3}{8}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. 1

7. 在平面直角坐标系中, 点 $P(\cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5})$ 是角 α 终边上的一点, 若 $\alpha \in [0, \pi)$, 则 $\alpha =$ ()

- A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{2\pi}{5}$ C. $\frac{3\pi}{5}$ D. $\frac{3\pi}{10}$

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A . 若 $\angle AFO = 2\angle AOF$

(O 为坐标原点), 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 2

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中奇数项的和为 A , 偶数项的和为 B , 且 $B - A = 45$, $2A = B + 615$, 则 $a_n =$ ()

- A. $3n-2$ B. $3n-1$ C. $3n+1$ D. $3n+2$

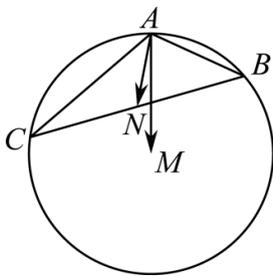
10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AC_1 与平面 A_1BD 相交于点 M , 则下列结论一定成立的是 ()

- A. $AM = \frac{1}{2}MC_1$ B. $A_1M \perp BD$ C. $AM \perp BD$ D. $MB = MD$

11. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波, 我们听到的声音多为复合音. 若一个复合音的数学模型是函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x (x \in \mathbb{R})$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的一个周期为 π B. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$
 C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称 D. $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上有 3 个零点

12. 如图, 圆 M 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, $AB = 4, AC = 6, N$ 为边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} =$ ()



- A. 5 B. 10 C. 13 D. 26

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x \geq 1 \\ 3^x, & x < 1 \end{cases}$ 的值域为 _____.

14. 某工厂生产产品的质量指标服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$. 质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品, 为使这种产品的良品率达到 95.45%, 则需调整生产工艺, 使得 σ 至多为 _____. (若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 0.9545$)

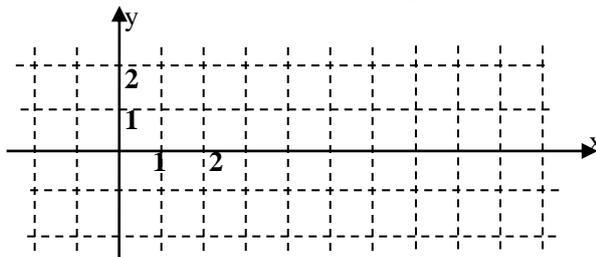
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, $a_2 = 3a_1, S_n$ 为其前 n 项和. 若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列, 则 $a_1 =$ _____ $a_n =$ _____.

16. 经过抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点的直线与抛物线相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 4$, 则 $\triangle OAB$ (O 为坐标原点) 的面积为 _____.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3})$.



- (1) 列表并画出 $y = f(x), x \in [-2, 10]$ 的图象;
- (2) 求函数 $g(x) = f(1+x) + f(4-x)$ 在区间 $[0, 6]$ 上的值域.

18. (本小题满分 12 分)

根据《国家学生体质健康标准》，高三男生和女生立定跳远单项等级如下（单位：cm）：

立定跳远单项等级	高三男生	高三女生
优秀	260 及以上	194 及以上
良好	245~259	180~193
及格	205~244	150~179
不及格	204 及以下	149 及以下

从某校高三男生和女生中各随机抽取 12 名同学，将其立定跳远测试成绩整理如下（精确到 1cm）：

男生	180	205	213	220	235	245	250	258	261	270	275	280
女生	148	160	162	169	172	184	195	196	196	197	208	220

假设用频率估计概率，且每个同学的测试成绩相互独立。

- (1) 分别估计该校高三男生和女生立定跳远单项 优秀率；
- (2) 从该校全体高三男生中随机抽取 2 人，全体高三女生中随机抽取 1 人，设 X 为这 3 人中立定跳远单项等级为优秀的人数，估计 X 的数学期望 $E(X)$ ；
- (3) 从该校全体高三女生中随机抽取 3 人，设“这 3 人的立定跳远单项既有优秀，又有其它等级”为事件 A ，“这 3 人的立定跳远单项至多有 1 个是优秀”为事件 B 。判断 A 与 B 是否相互独立。（结论不要求证明）

19. (本小题满分 12 分)

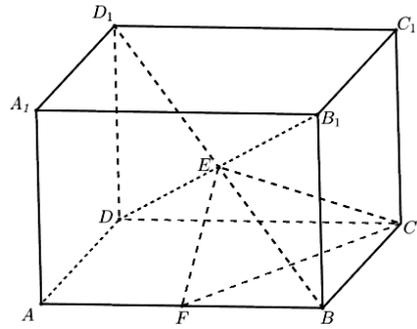
如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = AD = 2$ ， BD_1 和 B_1D 交于点 E ， F 为 AB 的中点。

- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ；

(2) 已知 B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 求

(i) 平面 CEF 与平面 BCE 的夹角的余弦值;

(ii) 点 A 到平面 CEF 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

已知点 P 是平面直角坐标系 xOy 异于 O 的任意一点, 过点 P 作直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 及 $l_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 的平行线, 分别交 x 轴于 M, N 两点, 且 $|OM|^2 + |ON|^2 = 8$.

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 在 x 轴正半轴上取两点 $A(m, 0), B(n, 0)$, 且 $mn = 4$, 过点 A 作直线 l 与轨迹 C 交于 E, F 两点, 证明: $\sin \angle EBA = \sin \angle FBA$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^{ax}}{bx}$ 在 $x=1$ 处取得极值 e .

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $kx + \ln x \leq x^2 f(x) - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立坐标系,

曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho = 2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上,

且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{2} \right|$, M 为不等式 $f(x) < 2$ 的解集.

(1) 求 M ;

(2) 证明: 当 $a, b \in M$ 时, $|a+b| < |1+ab|$.