湛江市2022届高中毕业班调研测试
数　　学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|-7<3-2x<1\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=-1+2i$,则 $z-\bar{z}+\frac{z}{i}=$

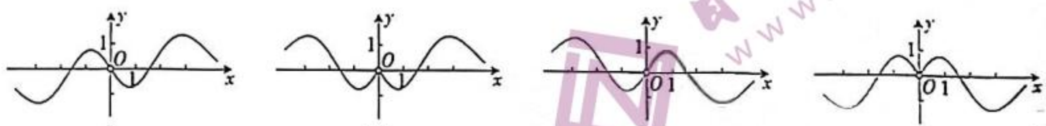
A. $2+5i$　　B. $2-3i$

C. $-2+5i$　　D. $-2-3i$

3. 已知$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}|=4$,则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

4. 函数 $f(x)=\frac{3x^2\cos x}{e^x-e^{-x}}$的部分图象大致为



A　　B　　C　　D

5. 函数 $f(x)=2x-5\ln x+\frac{3}{2}x^2$ 的单调递减区间是

A. $(\frac{1}{2},+\infty)$　　B. $(0,\frac{3}{2})$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列直线与 AC 成 $60°$角的是

A. B_1C_1　　B. BC_1　　C. DD_1　　D. B_1D

7. 定义域为 R 的奇函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,当 $x\in[0,1]$时, $f(x)=3^x-1$,则 $f(2000)+f(2001)+f(2002)+\cdots+f(2021)=$

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 的右支上，PF_1 的中点 N 在圆 $O:x^2+y^2=c^2$ 上，其中 c 为半焦距，则 $\sin\angle F_1PF_2=$

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

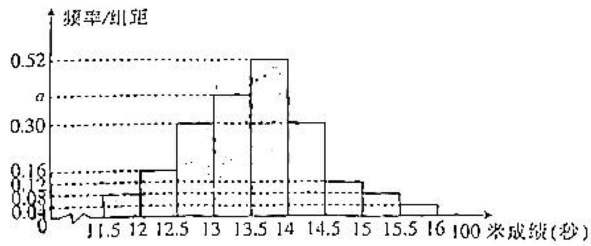
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 4π，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，且 $g(x)$ 是奇函数，则

A. $\varphi=\frac{\pi}{3}$　　B. $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$ 上的最大值为 -3

C. $\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$ 上的最大值为 $-\frac{3}{2}$

10. 某中学为了解高三男生的体能情况，通过随机抽样，获得了 200 名男生的 100 米体能测试成绩(单位：秒)，将数据按照 $[11.5,12),[12,12.5),\cdots,[15.5,16]$ 分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



由直方图推断，下列选项正确的是

A. 直方图中 a 的值为 0.38

B. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩的众数为 13.75 秒

C. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩不大于 13 秒的人数为 54

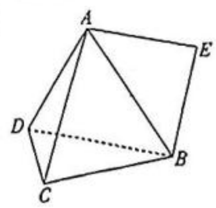
D. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩的中位数为 13.7 秒

11. 已知点 $A(0,2),B(1,1)$，且点 P 在圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 上，C 为圆心，则

A. 当 $\angle PAB$ 最大时，$\triangle APB$ 的面积为 2　　B. $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$

C. $|PA|-|PC|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$　　D. $||PA|-|PB||$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

12. 如图，等腰直角三角形 ABE 的斜边 AB 为正四面体 $A-BCD$ 的侧棱，$AB=2$，直角边 AE 绕斜边 AB 旋转一周，在旋转的过程中，下列说法正确的是



A. 三棱锥 $E-BCD$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

B. 三棱锥 $E-BCD$ 体积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$

C. 存在某个位置，使得 $AE\perp BD$

D. 设二面角 $D-AB-E$ 的平面角为 θ，且 $0<\theta<\pi$，则 $\theta<\angle DAE$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin 2x=3\sin x$，则 $\cos 2x=$ ___▲___.

14. 某学校有 100 人参加暑期社会实践，实践结束时的综合能力测试成绩 X 近似服从正态分布 $N(110,\sigma^2)$，若 $P(100\leqslant X\leqslant 110)=0.35$，则综合能力测试成绩在 120 分以上的人数大约为 ___▲___.

15. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，点 $A(x_0,\frac{p}{2})$ 在 C 上，点 B 的坐标为 $(0,-\frac{p}{2})$，若 $|AB|=5\sqrt{2}$，则 C 的焦点坐标为 ___▲___.

16. 若在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列. 现对数列 3，4 进行构造，第一次得到数列 3，7，4；第二次得到数列 3，10，7，11，4；依次构造，第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次得到数列 $3,x_1,x_2,\cdots,x_k,4$. 记 $a_n=3+x_1+x_2+\cdots+x_k+4$，则 $a_3=$ ___▲___，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$ ___▲___.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_4+a_{16}=40$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n-1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

已知△ABC 中内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $\cos A\cos B-1=\sin A\sin B-2\sin^2 C$.

(1)求角 C；

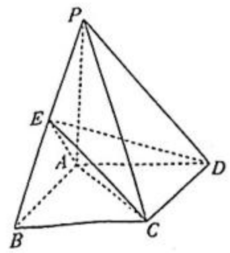
(2)若 $c=4$，$a^2+b^2=32$，求△ABC 的面积.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB=2$，点 E 是棱 PB 的中点.

(1)证明：平面 $ACE\perp$ 平面 PBC.

(2)若 $BC=3$，求二面角 $A-CE-D$ 的余弦值.



20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$，且 C 经过点 $P(-2,0)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

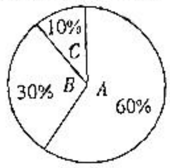
(2)过点 P 的直线 l 交 C 于另一点 A，若 $|PA|=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，求直线 l 的斜率.

21.(12 分)

某单位有员工 50000 人，一保险公司针对该单位推出一款意外险产品，每年每位职工只需要交少量保费，发生意外后可一次性获得若干赔偿金. 保险公司把该单位的所有岗位分为 A，B，C 三类工种，从事三类工种的人数分布比例如饼图所示，且这三类工种每年的赔付概率如下表所示：

工种类别	A	B	C
赔付概率	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{2}{10^5}$	$\frac{1}{10^4}$

职工类别分布饼图



对于 A，B，C 三类工种，职工每人每年保费分别为 a 元、a 元、b 元，出险后的赔偿金额分别为 100 万元、100 万元、50 万元，保险公司在开展此项业务过程中的固定支出为每年 20 万元.

(1)若保险公司要求每年收益的期望不低于保费的 15%，证明：$153a+17b\geqslant 4200$.

(2)现有如下两个方案供单位选择：

方案一：单位不与保险公司合作，职工不交保险，出意外后单位自行拿出与保险公司提供的等额赔偿金赔付给出意外的职工，单位开展这项工作的固定支出为每年 35 万元；

方案二：单位与保险公司合作，$a=25$，$b=60$，单位负责职工保费的 80%，职工个人负责 20%，出险后赔偿金由保险公司赔付，单位无额外专项开支.

根据该单位总支出的差异给出选择合适方案的建议.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x+b\cos x+\frac{1}{2}x^2+1$(其中 a,b 为实数)的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

(1)求实数 a,b 的值；

(2)求函数 $g(x)=f'(x)-3x$ 的最小值；

(3)若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $xf(x)\geqslant\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

湛江市2022届高中毕业班调研测试
数学参考答案

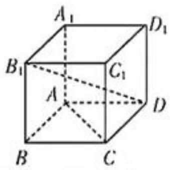
1. D　因为$A=\{x|1<x<5\}$，所以$A\cap B=\{2,3,4\}$.

2. A　$z=\bar{z}+\frac{z}{i}=4i+\frac{i^2+2i}{i}=2+5i$.

3. C　因为$\vec{OA}\perp\vec{AB}$，所以$\vec{OA}\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})=\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OA}^2=0$，从而$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OA}^2=16$.

4. C　函数$f(x)=\frac{3x^2\cos x}{e^x-e^{-x}}$的定义域$\{x|x\neq0\}$关于原点对称，且$f(-x)=\frac{3(-x)^2\cos(-x)}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$，则$f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称，排除B和D；又$f(\frac{\pi}{2})=0$，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$3x^2\cos x>0$，且$e^x>e^{-x}$，所以$f(x)>0$在$(0,\frac{\pi}{2})$内恒成立，排除A；所以只有C正确.

5. D　因为$f'(x)=2-\frac{5}{x}+3x(x>0)$，令$2-\frac{5}{x}+3x<0(x>0)$，解得$0<x<1$，所以$f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$.



6. B　因为AC与B_1C_1所成的角为$45°$，AC与DD_1所成的角为$90°$，AC与B_1D所成的角为$90°$，所以选B.

7. C　因为$-f(x)=f(-x)=f(x+2)$，所以$f(x)=f(x+4)$，则函数$f(x)$是以4为周期的周期函数，且$f(0)=0$，$f(1)=2$，所以$f(2)=0$，$f(3)=f(-1)=-2$，所以$f(2000)+f(2001)+f(2002)+\cdots+f(2021)=5[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]+f(0)+f(1)=2$.

8. A　由题意知，ON为$\triangle F_1PF_2$的中位线，所以$|PF_2|=2|ON|=2c$，$|PF_1|=2c+2a$，$|F_1F_2|=2c$，且$NF_2\perp PF_1$，所以$\cos\angle F_1PF_2=\frac{a+c}{2c}$，又$\frac{c}{a}=2$，所以$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$，$\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

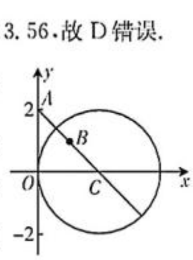
9. AD　因为函数$f(x)$的最小正周期为4π，所以$\omega=\frac{1}{2}$. 又$g(x)=3\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}+\varphi)$是奇函数，所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，化简得$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in Z)$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=3\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=-3\sin\frac{x}{2}$. 当$x\in[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$时，$\frac{x}{2}\in[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}]$，所以$-3\leqslant g(x)\leqslant-\frac{3}{2}$，故A，D正确，B，C错误.

10. BC　由概率统计相关知识，可知各组频率之和为1，所以$(0.08+0.16+0.30+a+0.52+0.30+0.12+0.08+0.04)\times0.5=1$，解得$a=0.40$，故A错误；

测试成绩的众数是直方图中频率最高组的中点，即$\frac{13.5+14}{2}=13.75$，故B正确；

由图可知，成绩不大于13秒的人数为$(0.08+0.16+0.30)\times0.5\times200=54$，故C正确；

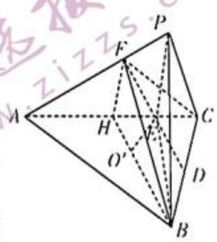
设中位数是x，则$(0.08+0.16+0.30+0.40)\times0.5+0.52\times(x-13.5)=0.5$，解得$x\approx13.56$，故D错误.



11. BCD　如图，点B在圆C内，当AP与圆C相切时$\angle PAB$最大，此时$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$，A错误；当$P$为线段$AB$与圆$C$的交点时，$|PA|+|PB|$取得最小值为$\sqrt{2}$，B正确；因为$|PC|=2$，所以当$|PA|$最大时，$|PA|-|PC|$也最大，当$A$，$C$，$P$三点共线，且$C$在$A$，$P$之间时，其最大值为$|AC|=2\sqrt{2}$，C正确；当$P$为射线$BC$与圆$C$的交点时，$||PA|$

$-|PB||$取得最大值$|AB|=\sqrt{2}$,D正确.

12. AD 如图,取AC的中点H,连接BH,HF.因为$\triangle ABC$是等边三角形,所以$BH\perp AC$.因为平面$PAC\perp$平面ABC,所以$BH\perp$平面PAC.因为$AE=3CE$,所以E是CH的中点.因为点D是棱BC的中点,所以$DE/\!/BH$,所以$DE\perp$平面PAC,故A正确.



由题意易得$\dfrac{AH}{AE}=\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{2}{3}$,所以$HF/\!/PE$,所以$HF=\dfrac{2}{3}PE=\dfrac{1}{6}AC$.因为$AC=6$,所以$HF=1$,$BH=3\sqrt{3}$.又$BF\perp HF$,所以$BF=\sqrt{BH^2+HF^2}=2\sqrt{7}$,所以$BF$是定值,故B错误.因为$HF=1$,所以$\triangle CEF$面积的最大值是$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times 1=\dfrac{3}{4}$,则三棱锥$B-CEF$体积的最大值是$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times 3\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$,故C错误.设点$P$到平面$ABC$的距离为$h$,则三棱锥$P-ABC$的体积$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\times h=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$,解得$h=PE=\dfrac{3}{2}$,故$PE\perp$平面$ABC$.设$\triangle ABC$的中心为$O'$,连接$O'E$,则$O'B=2O'H=2\sqrt{3}$,$O'E=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为$R$,球心到平面$ABC$的距离为$d$,则$R^2=O'B^2+d^2=O'E^2+(PE+d)^2$,解得$R^2=\dfrac{57}{4}$,故该三棱锥外接球的表面积是$4\pi R^2=57\pi$,故D正确.

13. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ 因为$2\sin 2x=3\sin x$,所以$4\sin x\cos x=3\sin x$,解得$\cos x=\dfrac{3}{4}$,从而$\sin x=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$,$\tan x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

14. $[-1,\dfrac{7}{3}]$ 易知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.不等式$f(3x^2)+f(-4x-7)\leqslant 0$可化为$f(3x^2)\leqslant f(4x+7)$,所以$3x^2-4x-7\leqslant 0$,解得$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{3}$.

15. $(0,\dfrac{5}{2})$ 把$A(x_0,\dfrac{p}{2})$的坐标代入$x^2=2py(p>0)$,得$x_0=\pm p$.因为$|AB|=5\sqrt{2}$,所以$\sqrt{p^2+p^2}=5\sqrt{2}$,解得$p=5$,所以抛物线C的焦点坐标为$(0,\dfrac{5}{2})$.

16. 98;$\dfrac{7(3^{n+1}+2n-3)}{4}$ 因为$a_1=3+7+4=14$,$a_2=3+10+7+11+4=35=a_1+7\times 3$,$a_3=a_2+7\times 3^2=98$,…,$a_n=a_{n-1}+7\times 3^{n-1}$,所以$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$,即$a_n=14+7(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})=\dfrac{7(3^n+1)}{2}$,从而$S_n=\dfrac{7}{2}[(3+3^2+\cdots+3^n)+n]=\dfrac{7(3^{n+1}+2n-3)}{4}$.

17. 解:(1)设$\{a_n\}$的公差为d,因为$a_4+a_{16}=2a_{10}=40$,所以$a_{10}=20$.

又$a_1=2$,由$2+9d=20$,得$d=2$. ………………………………………… 2分

所以$a_n=2+2(n-1)=2n$. ………………………………………… 3分

数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=2^n-1$,①

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=2^{n-1}-1$,②

①−②,得$b_n=2^{n-1}$. ………………………………………… 5分

当$n=1$时,$b_1=2-1=1$,满足$b_n=2^{n-1}$,所以$b_n=2^{n-1}$. ………………………………………… 6分

(2)因为$c_n=a_nb_n=2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$, ………………………………………… 7分

所以$T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$.③

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$.④ ………………………………………… 8分

③−④,得$-T_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}$. ………………………………………… 9分

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+2$. ······ 10分

18. 解:(1)根据题中所给数据,得男生射击环数的平均数为 $\overline{x}_{男}=\frac{1}{10}(8+9+7+9+7+6+10+10+8+6)=8$;

······ 1分

女生射击环数的平均数为 $\overline{x}_{女}=\frac{1}{10}(10+9+8+6+8+7+9+7+8+8)=8$. ······ 2分

男生射击环数的方差为 $s_{男}^2=\frac{1}{10}[(8-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(6-8)^2]=2$; ······ 4分

女生射击环数的方差为 $s_{女}^2=\frac{1}{10}[(10-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(8-8)^2]=\frac{6}{5}$.

故男生射击环数的平均数为8,方差为2,女生射击环数的平均数为8,方差为 $\frac{6}{5}$. ······ 6分

(2)2×2列联表如下:

	男生	女生	总计
成绩优异	4	3	7
成绩不优异	6	7	13
总计	10	10	20

······ 8分

所以 $K^2=\frac{20\times(4\times7-3\times6)^2}{7\times13\times10\times10}\approx0.2198<2.706$. ······ 11分

所以没有90%的把握认为"成绩优异"与性别有关. ······ 12分

19. 解:(1)因为 $\cos A\cos B-1=\sin A\sin B-2\sin^2 C$,

所以 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=1-2\sin^2 C$,即 $\cos(A+B)=\cos 2C$. ······ 2分

整理可得 $2\cos^2 C+\cos C-1=0$,解得 $\cos C=\frac{1}{2}$ 或 $\cos C=-1$(舍去). ······ 5分

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ······ 6分

(2)因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=32-ab=4^2$.

所以 $ab=16$. ······ 9分

所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. ······ 12分

20. (1)证明:因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BC\perp PA$. ······ 1分

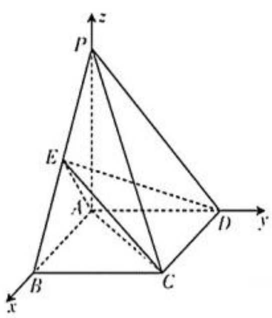
又因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $BC\perp AB$,因为 $PA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAB,从而 $BC\perp AE$. ······

······ 3分

因为 $PA=AB=2$,点 E 是棱 PB 的中点,所以 $AE\perp PB$.

因为 $PB\cap BC=B$,所以 $AE\perp$ 平面 PBC. ······ 4分

又因为 $AE\subset$ 平面 ACE,所以平面 $ACE\perp$ 平面 PBC. ······ 5分



(2)解:以 A 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$.如图所示,依题意可得 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,3,0)$,$D(0,3,0)$,$E(1,0,1)$,$\overrightarrow{EC}=(1,3,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,3,0)$,$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$. ······

······ 7分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+3y_1-z_1=0,\\ 2x_1+3y_1=0.\end{cases}$

不妨令 $x_1=3$，可得 $\boldsymbol{n}=(3,\ 2,\ 3)$. …………………………………………………… 9 分

设平面 CED 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2+3y_2-z_2=0,\\ 2x_2=0.\end{cases}$

不妨令 $y_2=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,1,3)$. …………………………………………………… 11 分

易知二面角 $A-CE-D$ 为锐角，$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$，

所以二面角 $A-CE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. …………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $|MF_1|+|MF_2|=4$，所以 $a=2$. …………………………………………………… 2 分

又椭圆 C 过点 $N(1,\dfrac{3}{2})$，所以 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4b^2}=1$. …………………………………………………… 3 分

所以 $b=\sqrt{3}$，椭圆 C 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………… 5 分

(2)显然直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=k(x+2)$，$A(x_1,y_1)$，…………………………………………………… 6 分

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$. …………………… 7 分

所以 $x_1+(-2)=-\dfrac{16k^2}{3+4k^2}$，$-2x_1=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，可得 $x_1=\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}$. …………………… 8 分

因为 $|PA|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}+2\right|=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$，…………………………………………………… 10 分

所以 $\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$，整理得 $32k^4-k^2-31=0$. …………………………………………………… 11 分

所以 $k^2=1$，解得 $k=\pm1$，即直线 l 的斜率为 ±1. …………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $f(x)=ae^x+b\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+1$，所以 $f'(x)=ae^x-b\sin x+x$. …………………… 1 分

由题意得 $\begin{cases}f(0)=a+b+1=1,\\ f'(0)=a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

(2)由(1)知 $f(x)=e^x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+1$，$g(x)=e^x+\sin x-2x$，所以 $g'(x)=e^x+\cos x-2$. 令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^x-\sin x$.

①当 $x<0$ 时，由 $e^x-2<-1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，知 $g'(x)=e^x+\cos x-2<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，无最小值. …………………………………………………… 3 分

②当 $x\geqslant0$ 时，由 $e^x\geqslant1$，$-1\leqslant-\sin x\leqslant1$，知 $h'(x)=e^x-\sin x>0$，所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g'(x)\geqslant g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$.

综上，$g(x)$ 的最小值为 1. …………………………………………………… 5 分

(3)对 x 分情况讨论如下：

①当 $x=0$ 时，对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，不等式 $xf(x)\geqslant\dfrac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 恒成立. …………………… 6 分

②当 $x>0$ 时，不等式 $xf(x)\geqslant\dfrac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 等价于 $e^x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+1\geqslant\dfrac{3}{2}x^2+2\lambda x+1$，即 e^x-x^2-

$2\lambda x-\cos x\geqslant 0$.

令 $G(x)=e^x-x^2-2\lambda x-\cos x$，则 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda=g(x)-2\lambda$.

当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由(2)知 $G'(x)=g(x)-2\lambda>g(0)-2\lambda=1-2\lambda\geqslant 0$.

所以 $G(x)$ 单调递增，从而 $G(x)>G(0)=0$，满足题意. …………………………………………………… 7 分

当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时，由(2)知 $G'(x)=g(x)-2\lambda=e^x-2x+\sin x-2\lambda$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

易证 $e^x\geqslant ex$，故 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda>(e-2)x-1-2\lambda$. 从而 $G'(\frac{1+2\lambda}{e-2})>(e-2)\times\frac{1+2\lambda}{e-2}-1-2\lambda=0$.

…………………………………………………………………………………………………… 9 分

又 $G'(0)=1-2\lambda<0$，所以存在唯一实数 $x_0\in(0,\frac{1+2\lambda}{e-2})$，使得 $G'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G(x)<G(0)=0$，不满足题意. …………………………………… 10 分

③当 $x<0$ 时，不等式 $xf(x)\geqslant\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 等价于 $e^x-x^2-2\lambda x-\cos x\leqslant 0$.

同上，令 $G(x)=e^x-x^2-2\lambda x-\cos x$，则 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda=g(x)-2\lambda$.

当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由(2)可知 $G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 单调递增，故 $G(x)<G(0)=0$，满足题意. ……………… 11 分

综上，可得 λ 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2}]$. …………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。