

贵阳市 2023 年高三适应性考试（一）

文科数学参考答案与评分建议

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	C	D	B	A	D	C	A	B	B	A	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

13. $y = 2x - 3$ 14. $\frac{25}{4}$ 15. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 16. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

三、解答题：第 17 至 21 题每题 12 分，第 22、23 题为选考题，各 10 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (1) 证明：∵ $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{7}{4}$ ①

又 $a_1, 2a_2, 4a_3$ 成等差数列，∴ $4a_2 = a_1 + 4a_3$ ，∴ $4a_1q = a_1 + 4a_1q^2$ ②

联立①②，得 $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ ，

∴ $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $b_n = n(\frac{1}{2})^{n-1}$ ，

∴ $T_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^1 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + n \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ ①

$\frac{1}{2}T_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^1 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} + n \cdot (\frac{1}{2})^n$ ②

① - ② 得 $\frac{1}{2}T_n = (\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1} - n \cdot (\frac{1}{2})^n$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot (\frac{1}{2})^n = 2 - 2 \cdot (\frac{1}{2})^n - n \cdot (\frac{1}{2})^n$$

$T_n = 4 - (n+2) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ 12 分

18 解：(1) 2×2 列联表如下：

	长时间使用手机娱乐	非长时间使用手机娱乐	合计
学习成绩下降	54	42	96
学习成绩未下降	36	68	104
合计	90	110	200

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (54 \times 68 - 42 \times 36)^2}{90 \times 110 \times 96 \times 104} \approx 9.44 > 7.879$$

∴有99.5%把握认为“学习成绩下降”与“长时间使用手机娱乐”有关.....6分

(2)在抽取的6人中，女生有 $6 \times \frac{12}{36} = 2$ 人，男生有 $6 \times \frac{24}{36} = 4$ 人，

设女生为1, 2，男生为a, b, c, d，从访谈的6人中抽取2人的基本事件共有15种：

(1,2),(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)

设“被访谈的两人中一男一女生”为事件A，共有8种，则 $P(A) = \frac{8}{15}$12分

19.解：(1)由已知，在图①中， $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形， $ABCE$ 为正方形。

在图②中，由 $CB=CE$ ， $AB=AE$ 且F是BE的中点，则

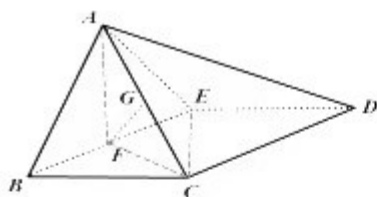
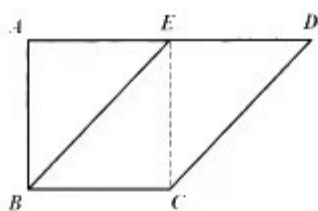
$AF \perp BE$ ， $CF \perp BE$ ，且 $AF \cap CF = F$

所以 $BE \perp$ 平面ACF，从而 $BE \perp FG$ 。

又因为 $BE \parallel CD$ ，所以 $CD \perp FG$ ，

因为 $AF=CF$ ，且G是AC的中点，所以 $FG \perp AC$ ，

又因为 $AC \cap CD = C$ ，所以 $FG \perp$ 平面ACD.....6分



(2)在图②中，因为 $AB = \sqrt{2}$ ，所以 $AF = BF = CF = EF = 1$ ， $CE = \sqrt{2}$ ，又因为 $AC = \sqrt{2}$ ，

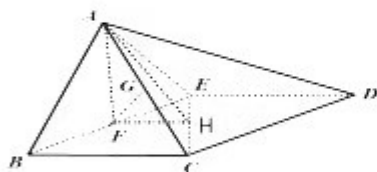
所以 $AF^2 + CF^2 = AC^2$ ，所以 $AF \perp CF$ ，又由(1)知 $AF \perp BE$ ，所以 $AF \perp$ 面BCDE，

所以 $AF \perp CE$ 。

设H是CE中点，因为 $FC = FE$ ，

所以 $FH \perp CE$ ，又 $AF \cap FH = F$ ，

所以 $CE \perp$ 平面AFH，所以 $CE \perp AF$ 。



由题易得 $CE = AB = BC = \sqrt{2}$ ， $FH = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$AH = \sqrt{AF^2 + FH^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以 $\triangle BCE$ 的面积为 $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = 1$,

$\triangle ACE$ 的面积为 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} CE \cdot AF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

设点 B 到平面 ACE 的距离为 d , 由 $V_{B-ACE} = V_{A-BCE}$ 有 $\frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle BCE} \cdot AF$,

即 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d = \frac{1}{3} \times 1 \times 1$, 所以 $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 由已知 $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 6 分

(2) 证明: 设过右焦点 $(1, 0)$ 的直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 且与曲线 C 的交点分别为

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$$

则由韦达定理有: $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}$,

设直线 l_{PM} : $y = \frac{y_1}{x_1 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 当 $x = 0$ 时, $P(0, \frac{-\sqrt{2}y_1}{x_1 - 2})$,

同理, 设直线 l_{QN} : $y = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 当 $x = 0$ 时, $Q(0, \frac{-\sqrt{2}y_2}{x_2 - \sqrt{2}})$ 9 分

若证 $PS \perp QS$, 即证 $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QS} = 0$

$$\overrightarrow{PS} = (\sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}y_1}{x_1 - \sqrt{2}}), \overrightarrow{QS} = (\sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}y_2}{x_2 - \sqrt{2}})$$

$$\therefore \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QS} = (\sqrt{2} + 1)^2 + \frac{2y_1 y_2}{(x_1 - \sqrt{2})(x_2 - \sqrt{2})} = (3 + 2\sqrt{2}) + \frac{2y_1 y_2}{(my_1 + 1 - \sqrt{2})(my_2 + 1 - \sqrt{2})}$$

$$= (3+2\sqrt{2}) + \frac{2 \cdot (\frac{-1}{m^2+2})}{m^2 \cdot (\frac{-1}{m^2+2}) + (1-\sqrt{2})m \cdot (\frac{-2m}{m^2+2}) + (1-\sqrt{2})^2}$$

$$= (3+2\sqrt{2}) + \frac{-2}{6-4\sqrt{2}} = (3+2\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QS} = 0,$$

$$\therefore PS \perp QS \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=x^3-3x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

由 $f'(x)=3x^2-3$, 令 $f'(x)>0$, 解得 $x<-1$ 或 $x>1$; 令 $f'(x)<0$, 解得 $-1<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 1)$.

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 易知原点 O 不在函数 $f(x)$ 的图像上, 设切点为 $(t, f(t))$ ($t \neq 0$).

求导得 $f'(x)=3x^2+2(a-1)x-3$, 则 $\frac{f(t)}{t}=f'(t)$

$$\text{即 } \frac{t^3+(a-1)t^2-3t+1}{t}=3t^2+2(a-1)t-3, \text{ 整理得 } 2t^3+(a-1)t^2-1=0, \text{ 从而}$$

$$1-a=2t-\frac{1}{t^2}.$$

令 $g(t)=2t-\frac{1}{t^2}$ ($t \neq 0$), 则 $g'(t)=2+\frac{2}{t^3}$, 令 $g'(t)>0$, 解得 $t>0$ 或 $t \leq -1$; 令 $g'(t)<0$, 解得 $-1<t<0$.

所以函数 $g(t)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增.

故当 $t<0$ 时, $g(t)_{\max}=g(-1)=-3$, 且当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $g(t) \rightarrow -\infty$; $t \rightarrow 0$ 时, $g(t) \rightarrow -\infty$.

当 $t>0$ 时, $g(t)$ 的取值范围为 $\mathbb{R}$.

而过原点 O 可作三条直线与 $f(x)$ 的图像相切, 则 $\frac{f(t)}{t}=f'(t)$ 有三个不相等的实数根, 也

就是直线 $y=1-a$ 与函数 $y=g(t)$ 的图像有三个交点, 则有 $1-a<-3$ 即 $a>4$.

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 由题知半圆弧 C_1 的极坐标方程为: $\rho = 2 \sin \theta, (\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$, 化为直角坐标方

程为: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 其圆心为 $O_1(0,1)$, 半径为 $r=1$, 由题易得 $A(2,0)$, 所以

$$|MA|_{\max} = |O_1A| + 1 = \sqrt{5} + 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由题知 $|ON| = 2, |OM| = 2 \sin \theta, (\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$

$\angle MON = \theta - \frac{\pi}{4}$, 所以 $\triangle MON$ 的面积为

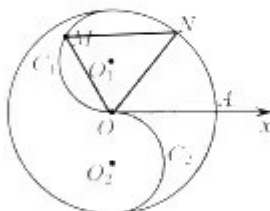
$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \times |ON| \times |OM| \times \sin \angle MON$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin \theta \times \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$= 2 \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{2} (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) = \sqrt{2} (\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [1 - \sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4})], \text{ 因为 } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \text{ 所以 } 2\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}],$$

$$\sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}], \text{ 所以 } S_{\triangle MON} \in (0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



23. (1) 解: 由 $a^2 + 4b^2 = 4$ 得 $\frac{a^2}{4} + b^2 = 1$,

所以令 $a = 2 \cos \theta, b = \sin \theta$,

所以 $a + b = 2 \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = 2$,

因为 $-1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1$, 所以 $a + b \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 证明: 因为 $a > 0, b > 0, a^2 + 4b^2 = 4$ 且 $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$,

所以 $ab \leq 1$, 从而 $\sqrt{ab} \leq 1$.

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{\sqrt{2ab}} \geq \sqrt{2}, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \geq \sqrt{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线