2023届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（三）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	A	B	A	B	D

【解析】

1．因为$a+\frac{i}{1-i}=a+\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=a-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$是纯虚数，所以$a-\frac{1}{2}=0$，即$a=\frac{1}{2}$，故选B.

2．由题意可得：$A=\{0，1，2，3，4\}$，$B=[2，+\infty)$，所以$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty，2)$，故$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{0，1\}$，故选C.

3．设到A医院就诊的发热患者人数是$4m$，则到B医院就诊的发热患者人数是m，A，B两所医院因发热就诊的患者中分别有37.25%、18%被确诊为“甲流”感染，则从到这两所医院就诊的发热患者中任选一人，则此人未感染“甲流”的概率是$P=\frac{(1-37.25\%)\cdot 4m+(1-18\%)m}{5m}=0.666$，故选B.

4．由题意知$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，又$\vec{b}=(3，-4)$，所以$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(\frac{3}{5}，-\frac{4}{5}\right)$，$\cos\langle\vec{a}，\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-3-8}{\sqrt{5}\times 5}$ $=-\frac{11\sqrt{5}}{25}$，所以$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$|\vec{a}|\cos\langle\vec{a}，\vec{b}\rangle\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\sqrt{5}\times\left(-\frac{11\sqrt{5}}{25}\right)\left(\frac{3}{5}，-\frac{4}{5}\right)$ $=\left(-\frac{33}{25}，\frac{44}{25}\right)$，故选A.

5．方程$k(x+2y+1)^2=(x^2+y^2-4x+4)$，即$\sqrt{k}\,|x+2y+1|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，即$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\frac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}}=\frac{\sqrt{k}}{\frac{1}{\sqrt{r^2+2^2}}}=\sqrt{5k}$，可得动点$P(x，y)$到定点$(2，0)$和定直线$x+2y+1=0$的距离的比为常数$\sqrt{5k}$，由双曲线的定义，可得$\sqrt{5k}>1$，解得$k>\frac{1}{5}$，即$k$的取值范围为$\left(\frac{1}{5}，+\infty\right)$，故选B.

6．在圆锥 SO 中，依题意，$\pi l = 2\pi r$，即有 $l = 2r$，高 $SO=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r$，设圆柱的底面圆半径为 r_0，母线为 l_0，则有 $PO = l_0$，由 $\frac{2\pi r_0 l_0}{\pi r l}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得：$r_0 l_0=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$，又 $\frac{\sqrt{3}r-l_0}{\sqrt{3}r}=\frac{SP}{SO}=\frac{r_0}{r}$，即 $l_0=\sqrt{3}(r-r_0)$，于是 $r_0=\frac{1}{2}r$，$l_0=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，所以 $\frac{l}{l_0}=\frac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 A．

7．由 $xf'(x)+f(x)>1$，设 $g(x)=xf(x)-x$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)-1>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又 $x\in(a,\ b)$，所以 $g(a)<g(x)<g(b)$，即 $af(a)-a<xf(x)-x<bf(b)-b$，所以 $xf(x)+b<bf(b)+x$ 或 $xf(x)+a>af(a)+x$，故选 B．

8．令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-\tan x=\frac{\mathrm{e}^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\cos x-\sin x)$，当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，又 $g(0)=\mathrm{e}^0\cos 0-\cos 0-\sin 0=1-1=0$，所以 $g(x)>0$，又 $\cos x>0$，所以 $f(x)>0$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，所以 $f(0.5)=\sqrt{\mathrm{e}}-1-\tan 0.5>0$，即 $\sqrt{\mathrm{e}}-1>\tan 0.5$，即 $c>b$；令 $h(x)=\ln(1+x)-x$，$0<x<1$，所以 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,\ 1)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$ 在 $(0,\ 1)$ 上恒成立，所以 $\ln(1+0.5)=\ln 1.5<0.5$，令 $m(x)=x-\tan x$，$x\in(0,\ 1)$，所以 $m'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}<0$，故 $m(x)=x-\tan x$ 在 $x\in(0,\ 1)$ 上单调递减，所以 $m(x)<m(0)=0$，即 $x<\tan x$ 在 $x\in(0,\ 1)$ 恒成立，当 $x=0.5$ 时，$0.5<\tan 0.5$，故 $\ln 1.5<0.5<\tan 0.5$，即 $a<b$，综上，$c>b>a$，故选 D．

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BD	ABC	BC

【解析】

9．A：由 $(0.01+0.06+0.07+0.04+a)\times 5=1$，解得 $a=0.02$，故选项 A 正确；B：体重低于 60 千克的频率为 $(0.01+0.06+0.07)\times 5=0.7$，所以这 100 名学生中体重低于 60 千克的人数为 $0.7\times 100=70$ 人，故选项 B 错误；C：估计这 100 名学生体重的众数为 $\frac{55+60}{2}=57.5$，故

选项 C 正确；D. 易知该校学生体重的 75%分位数在[60，65)内，而在[45，60)的频率为 0.7，在[45，65)的频率为 0.9，所以估计该校学生体重的 75%分位数约为 $60+5\times\frac{0.75-0.7}{0.9-0.7}=61.25$，故选项 D 正确，故选 ACD.

10．A：若存在直线，则由直线和平面平行的判定定理知直线 a 与平面 α 平行，与条件相矛盾，故选项 A 正确；B：由线面垂直的判定定理可知，当 $l_1\subset\alpha$ 时，有 $l_1\perp\alpha_1$，选项 B 错误；C：当直线 m, n 不相交时，由线面垂直的判定定理知：$l\perp m$ 且 $l\perp n$ 时，得不到 $l\perp\alpha$，故选项 C 正确；D：当 $\alpha_1/\!/\beta_1$，$\alpha\perp\beta$ 时，可满足题设条件，此时平面 α 与平面 β 所成的二面角为 $90°$，平面 α_1 与平面 β_1 所成的二面角为 $0°$，故选项 D 错误，故选 BD.

11．因为 $x_0=r\cdot\cos x$，$y_0=r\cdot\sin x$，所以 $f(x)=\mathrm{si}(\cos x)=\frac{y_0+\sqrt{3}x_0}{2r}=\frac{r\cdot\sin x+\sqrt{3}r\cdot\cos x}{2r}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，A：$f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$，得到的图象关于原点对称，故 A 正确；B：令 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$，则 $x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，所以 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又因 $x\in[-2\pi,2\pi]$，所以 $x=-\frac{4\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$，所以 $f(x)$ 在区间 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 上的零点之和为 $-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，故 B 正确；C：$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$，$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{12}\right]$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{12}\right]$ 上单调递减，所以 C 正确；D：$x\in(0,7\pi)$，$x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{22\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 在区间 $(0,7\pi)$ 上有 3 个周期，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,7\pi)$ 上有且仅有 4 个极大值点，故 D 错误，故选 ABC.

12．A：因为 $DD_1/\!/BB_1$，则 $\angle BB_1F$ 即为异面直线 DD_1 与 B_1F 所成的角，所以 $\tan\angle BB_1F=\frac{BF}{BB_1}=\frac{1}{2}$，故 A 错误；B：取 A_1D_1 的中点 M，D_1C_1 的中点 N，易证平面 $DMN/\!/$ 平面 B_1EF，所以 MN // 平面 B_1EF，则 P 点轨迹为线段 MN，在 $\triangle DMN$ 中，过 D 作 $DP\perp MN$，此时 DP 取得最小值，因为 $DM=DN=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $DP=\sqrt{DN^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，故 B 项正确；C：因为平面 $AA_1D_1D/\!/$ 平面 BB_1C_1C，则过

点 D_1，E，F 的平面必与 AA_1 与 CC_1 交于两点，记为 M，N，过点 D_1，E，F 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形为五边形 D_1MEFN，且 $D_1M // NF$，同理可得 $D_1N // ME$，以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $AM=m$，$CN=n$，则 $M(1,\ 0,\ m)$，$N(0,\ 1,\ n)$，$E\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$，$D_1(0,\ 0,\ 1)$，所以 $\overrightarrow{ME}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ -m\right)$，$\overrightarrow{D_1N}=(0,\ 1,\ n-1)$，$\overrightarrow{D_1M}=(1,\ 0,\ m-1)$，$\overrightarrow{NF}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -n\right)$，因为 $D_1M // NF$，$D_1N // ME$，由此解得 $AM=\frac{1}{3}$，$CN=\frac{1}{3}$，所以 $A_1M=\frac{2}{3}$，$C_1N=\frac{2}{3}$，$D_1M=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$D_1N=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$ME=\frac{\sqrt{13}}{6}$，$FN=\frac{\sqrt{13}}{6}$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以过点 D_1，E，F 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面周长为 $\sqrt{13}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；D：取 EF 的中点 O_1，则 $O_1E=O_1F=O_1B$，过 O_1 作 $OO_1 // BB_1$，且使得 $OO_1=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}$，则 O 为三棱锥 B_1-BEF 的外接球的球心，所以 OE 为外接球的半径，因为在 $\mathrm{Rt}\triangle EBF$ 中，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $R^2=OE^2=OO_1^2+\left(\frac{EF}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$S_{球}=4\pi R^2=\frac{3\pi}{2}$，故 D 项错误，故选 BC．

三、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	8	1	$-\sqrt{3}$	$\left(-\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e^2}\right]$

【解析】

13．因为 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})=8(a_8+a_9)>0$，所以 $a_8+a_9>0$，又 $a_7+a_9=2a_8<0$，所以 $a_9>0$，则 $(S_n)_{\min}=S_8$．

14．因为 $\mu=50$，根据题意以及正态曲线的特征可知，$|X-50|<3\sigma$ 的解集 $M\subseteq(47,\ 53)$，由 $|X-50|<3\sigma$ 可得，$50-3\sigma<X<50+3\sigma$，所以 $\begin{cases}50-3\sigma\geqslant 47,\\ 50+3\sigma\leqslant 53,\end{cases}$ 解得 $\sigma\leqslant 1$，故 σ 至多为1．

15．显然过点 P 作圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的两条切线斜率存在，设此切线方程为 $y-3=k(x-\sqrt{3})$，

即 $kx-y-\sqrt{3}k+3=0$，于是 $\dfrac{|1-\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k_1=0$，$k_2=\sqrt{3}$，设点 $M(x_1, x_1^2)$，$N(x_2, x_2^2)$，

不妨令直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2，于是 $\dfrac{x_1^2-3}{x_1-\sqrt{3}}=x_1+\sqrt{3}=0$，$x_1=-\sqrt{3}$，同理

$x_2=0$，直线 MN 的斜率 $k_3=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=-\sqrt{3}$．

16．函数 $f(x)=xe^x+ax$，设 $g(x)=xe^x$，$y=-ax$，因为存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，所以存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=-ax$ 的下方，因为 $g'(x)=(x+1)e^x$，所以当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=-1$ 时，$[g(x)]_{\min}=g(-1)=-\dfrac{1}{e}$；当 $x=0$ 时，$g(0)=0$，

当 $x=-2$ 时，$g(-2)=-\dfrac{2}{e^2}$，直线 $y=-ax$ 恒过 $(0, 0)$，斜率为 $-a$，当 $a\geqslant 0$ 时，不满足题意，当 $-1<a<0$ 时，故 $a>g(-1)=-\dfrac{1}{e}$，且 $g(-2)=-\dfrac{2}{e^2}\geqslant 2a$，解得 $-\dfrac{1}{e}<a\leqslant -\dfrac{1}{e^2}$，所以 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e^2}\right]$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

（1）解：因为 $a_n=b_n-k$，且 $a_{n+1}=\dfrac{7a_n-8}{3a_n-4}$，

所以 $b_{n+1}=a_{n+1}+k=\dfrac{7(b_n-k)-8}{3(b_n-k)-4}+k=\dfrac{(3k+7)b_n-3k^2-11k-8}{3b_n-3k-4}$，

……………………………………………………………………（3 分）

则 $-3k^2-11k-8=0$，………………………………………………（4 分）

解得 $k=-1$ 或 $-\dfrac{8}{3}$（舍去）．……………………………………（5 分）

（2）证明：由（1）可得：当 $k=-1$ 时，则 $a_n=b_n+1$，且 $b_{n+1}=\dfrac{4b_n}{3b_n-1}$，…………（6 分）

所以 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{3b_n-1}{4b_n}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{3}{4}$，………………………………（7 分）

$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{3}{5}\right)$，且 $\frac{1}{b_1}-\frac{3}{5}=\frac{1}{8}\neq 0$，…………………………………………（9 分）

所以数列 $\left\{\frac{1}{b_n}-\frac{3}{5}\right\}$ 是以 $\frac{1}{8}$ 为首项，$-\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列．…………………………（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x+1=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，………………（2 分）

因为 $f(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调，

所以 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{4\pi}{3}-\pi$，解得 $0<\omega\leqslant 3$，

因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$，所以 $\omega=1$，2，3，……………………………………………………………（3 分）

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$，

所以 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，且 $\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，……………………（4 分）

解得 $\omega=2+3k$，………………………………………………………………………………（5 分）

当 $k=0$ 时，$\omega=2$ 满足题意，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$．…………………………………………………………（6 分）

（2）因为 $f\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{3}+1$，

所以 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{3}+1$，

所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，

所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以 $A=\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$，………………………………………………………………………（8 分）

∵△ABC 为钝角三角形，所以当 $A=\frac{5\pi}{6}$ 时，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $b^2+c^2+\sqrt{3}bc=4$，即 $(2-\sqrt{3})bc=(b+c)^2-4$，

因为 $(2-\sqrt{3})bc\leqslant(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立，

所以 $(2-\sqrt{3})\dfrac{(b+c)^2}{4}\geqslant(b+c)^2-4$，……………………………………………………（10 分）

解得 $b+c\leqslant2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，

则 $a+b+c\leqslant2+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$．……………………………………………………（11 分）

$\therefore\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$．…………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）设事件 A：在 3 次中只有 1 次拿到白球，事件 B：3 次中至多 1 次抽到红球，则事件 AB：在 3 次中只有 1 次抽到白球，其他两次至多 1 次抽到红球，

所以 $P(A)=\dfrac{C_7^1C_8^2}{C_{15}^3}=\dfrac{28}{65}$，……………………………………………………（2 分）

$P(AB)=\dfrac{C_3^1C_5^1C_7^1+C_5^2C_7^1}{C_{15}^3}=\dfrac{5}{13}$；…………………………………………………（4 分）

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{25}{28}$．…………………………………………………（5 分）

（2）拿到红球的次数 X 为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=\dfrac{C_{12}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{44}{91}$；……………………………………………………（6 分）

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_{12}^2}{C_{15}^3}=\dfrac{198}{455}$；…………………………………………………（7 分）

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_{12}^1}{C_{15}^3}=\dfrac{36}{455}$；…………………………………………………（8 分）

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_{15}^3}=\dfrac{1}{455}$，…………………………………………………（9 分）

故分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{44}{91}$	$\dfrac{198}{455}$	$\dfrac{36}{455}$	$\dfrac{1}{455}$

……………………………………………………（10 分）

所以 $E(X)=\dfrac{44}{91}\times0+\dfrac{198}{455}\times1+\dfrac{36}{455}\times2+\dfrac{1}{455}\times3=\dfrac{273}{455}$．……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $AB=AC=5$，O 为 BC 的中点，

所以 $BC\perp AO$，…………（1 分）

因为 $B_1C_1=CC_1=4$，M 为 B_1C_1 的中点，

所以 $BC\perp MO$．…………（2 分）

因为 $MO\cap AO=O$，MO，$AO\subset$ 平面 AOM，

所以 $BC\perp$ 平面 AOM，…………（4 分）

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，

所以平面 $ABC\perp$ 平面 AOM．…………（5 分）

（2）解：如图，在平面 AOM 内，作 $ON\perp OA$，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 AOM，平面 $ABC\cap$ 平面 $AOM=OA$，$ON\subset$ 平面 AOM，

所以 $ON\perp$ 平面 ABC，

以 OB，OA，ON 分别为 x 轴、y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系．…………（6 分）

因为 $MO\perp BC$，$AO\perp BC$，

所以 $\angle AOM$ 为二面角 $A-BC-B_1$ 的平面角，即 $\angle AOM=\dfrac{\pi}{6}$，…………（7 分）

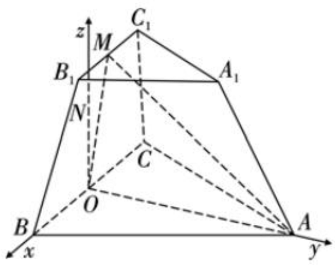
所以 $A(0,3,0)$，$B(4,0,0)$，$C(-4,0,0)$，$M(0,3,\sqrt{3})$，$C_1(-2,3,\sqrt{3})$，$B_1(2,3,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(-2,3,\sqrt{3})$，…………（8 分）

设平面 AA_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

其中 $\overrightarrow{CA}=(4,3,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(2,3,\sqrt{3})$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x+3y=0,\\ 2x+3y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$



则可取 $\vec{n}=(-3,4,-2\sqrt{3})$，

…………（10 分）

设直线 BB_1 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\vec{n}\rangle|=\dfrac{3}{\sqrt{37}}=\dfrac{3\sqrt{37}}{37}$，

所以直线 BB_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{37}}{37}$．

…………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意，在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，上下顶点为 $M(0,1)$，$N(0,-1)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $b=1$，…………（2 分）

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=2$，

所以 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.…………（4 分）

（2）证明：由题意及（1）得，在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，$M(0,1)$，$N(0,-1)$，

由题意得 $k_{NC}>0$，$k_{MC}<0$，

故设直线 NC：$y=k_1x-1$，直线 MC：$y=k_2x+1$，…………（5 分）

因为直线 NC 与直线 MC 相交于点 C，

由 $\begin{cases} y=k_1x-1, \\ y=k_2x+1 \end{cases}$ 得：$C\left(\frac{2}{k_1-k_2},\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)$.…………（6 分）

又因为点 C 在椭圆上，

所以 $\frac{\left(\frac{2}{k_1-k_2}\right)^2}{4}+\left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)^2=1$，整理得：$k_1k_2=-\frac{1}{4}$，

…………（7 分）

因为直线 NC：$y=k_1x-1$ 交 x 轴的正半轴于 B 点，

令 $y=0$ 得：$x=\frac{1}{k_1}$，故 $B\left(\frac{1}{k_1},0\right)$，…………（8 分）

又因为 $P(2,0)$，

所以 $|OB|=\frac{1}{k_1}$，$|BP|=2-\frac{1}{k_1}$，

所以 $\frac{|OB|}{|BP|}=\frac{\frac{1}{k_1}}{2-\frac{1}{k_1}}=\frac{1}{2k_1-1}$，…………（9 分）

因为直线 MC：$y=k_2x+1$ 交 AP 于点 D，

令 $x=2$ 得：$y=2k_2+1$，故 $D(2,2k_2+1)$，…………（10 分）

又因为 $A(2,1)$，

所以 $|AD|=1-(2k_2+1)=-2k_2$，$|DP|=2k_2+1$，

所以$\dfrac{|AD|}{|DP|}=\dfrac{-2k_2}{2k_2+1}$，……………………………………………………………………（11 分）

又因为$k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$，

所以$k_1=\dfrac{-\frac{1}{4}}{k_2}=-\dfrac{1}{4k_2}$，

所以$\dfrac{|OB|}{|BP|}=\dfrac{1}{2k_1-1}=\dfrac{1}{2\left(-\frac{1}{4k_2}\right)-1}=\dfrac{-2k_2}{1+2k_2}=\dfrac{|AD|}{|DP|}$，

所以$\dfrac{|OB|}{|BP|}=\dfrac{|AD|}{|DP|}$．……………………………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：因为函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=1$时，$g(x)=x^2-\ln x$，$g'(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$，………………………………………（1 分）

令$g'(x)=0$，解得$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，…………………………………………………………（2 分）

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；…………………………………（3 分）

当$x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

所以$g(x)$的单调递增区间为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

……………………………………………………………………………………………（4 分）

（2）证明：$f(x)$有 2 个不同的零点等价于$a=\dfrac{\ln x}{x^2}$有 2 个不同的实数根．

令$F(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，则$F'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，……………………………………………（5 分）

当$F'(x)=0$时，解得$x=\sqrt{e}$，

所以当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，

所以$y=F(x)$在$x=\sqrt{e}$处取极大值为$F(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，………………………………（6 分）

又因为$F(1)=0$，当$x\in(0,1)$时，$F(x)<0$，当$x>1$时，$F(x)>0$，

且$x\to+\infty$时，$F(x)\to 0$，

所以$1<x_1<\sqrt{e}<x_2$，且$a\in\left(0,\dfrac{1}{2e}\right)$，…………（7分）

因为x_1，x_2是方程$a=\dfrac{\ln x}{x^2}$的2个不同实数根，即$\begin{cases}\ln x_1=ax_1^2,\\ \ln x_2=ax_2^2,\end{cases}$

将两式相除得$\dfrac{x_2^2}{x_1^2}=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$，…………（8分）

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则$t>1$，$t^2=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$，变形得$\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t^2-1}$，$\ln x_2=\dfrac{t^2\ln t}{t^2-1}$，

又因为$x_1^2=\dfrac{\ln x_1}{a}$，$x_2^2=\dfrac{\ln x_2}{a}$，因此要证$x_1^2+4x_2^2>\dfrac{5}{2a}$，只需证$\dfrac{\ln x_1}{a}+\dfrac{4\ln x_2}{a}>\dfrac{5}{2a}$，

…………（9分）

因为$a>0$，所以只需证$\ln x_1+4\ln x_2>\dfrac{5}{2}$，即证$\dfrac{4t^2\ln t}{t^2-1}+\dfrac{\ln t}{t^2-1}>\dfrac{5}{2}$，

…………（10分）

因为$t>1$，即证$\ln t-\dfrac{5(t^2-1)}{2(4t^2+1)}>0$，

令$G(t)=\ln t-\dfrac{5(t^2-1)}{2(4t^2+1)}(t>1)$，则$G'(t)=\dfrac{16t^4-17t^2+1}{t(4t^2+1)^2}=\dfrac{(t^2-1)(16t^2-1)}{t(4t^2+1)^2}>0$，

…………（11分）

所以$G(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$G(t)>G(1)=0$，

即当$t>1$时，$\ln t-\dfrac{5(t^2-1)}{2(4t^2+1)}>0$成立，命题得证.

…………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。