

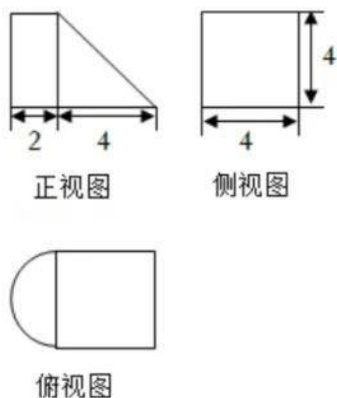
郑州外国语学校 2022-2023 学年上期高三第四次调研考试试卷

数 学 (文科)

(120 分钟 150 分)

一、选择题 (本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x|x^2-x-2\leq 0\}$, $B=\{x|\lg x>0\}$, 则 $A\cap B=$
A. $\{x|-1\leq x\leq 2\}$ B. $\{x|1<x\leq 2\}$ C. $\{x|1<x<2\}$ D. $\{x|x\geq -1\}$
2. 已知复数 z 满足 $zi=3i+4$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应点在
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 下列各命题的否定为真命题的是
A. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$ B. $\exists x\in\mathbb{R}, 2^x>x^2$
C. $\exists x\in\mathbb{R}^+, (\frac{1}{3})^x>\log_2 x$ D. $\forall x\in[0, \frac{\pi}{2}], \sin x<x$
4. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型: $\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$, 其中 t 为时间 (单位: min), θ_0 为环境温度, θ_1 为物体初始温度, θ 为冷却后温度. 假设在室内温度为 20° 的情况下, 一桶咖啡由 100° 降低到 60° 需要 20min, 则 k 的值为
A. $\frac{\ln 2}{20}$ B. $\frac{\ln 3}{20}$ C. $-\frac{\ln 2}{10}$ D. $-\frac{\ln 3}{10}$
5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是



- A. $16\pi+32$ B. $8\pi+32$ C. $8\pi+\frac{64}{3}$ D. $16\pi+\frac{64}{3}$
6. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $2S_3=3a_2+8a_1$, $S_8=2S_7+2$, 则 $a_2=$
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

7. 将函数 $f(x) = \sin^2(\frac{5\pi}{12} - x) - \sin^2(\frac{\pi}{12} + x)$ 的图象向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度后, 得到函数 $g(x)$

的图象, 若 $g(x)$ 满足 $g(\frac{\pi}{6} - x) = g(\frac{\pi}{6} + x)$, 则 φ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

8. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AB=AC=AA_1=1$, P 为线段 A_1B 上的动点, 则 $AP+PC_1$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

9. 已知抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F , 点 P 是 C 上一点, 且 $|PF|=5$, 以 PF 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为 1, 则 $p=$

- A. 2 或 4 B. 2 C. 4 或 6 D. 4

10. 已知函数 $f(x)=ae^x+4x$, 对任意的实数 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > x_1+x_2$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[\frac{2}{e}, +\infty)$ B. $[\frac{2}{e^3}, +\infty)$ C. $(\frac{2}{e}, +\infty)$ D. $(\frac{2}{e^3}, +\infty)$

11. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个内切球 O , 过正方体中两条异面直线 AB, A_1D_1 的中点 P, Q 作直线, 则该直线被球面截在球内的线段的长为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

12. 已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 的最大值为 2
C. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x-\pi) = f(x)$ D. $\forall x \in [0, \pi], f(x+\pi) > 0$

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上.)

13. 点 $M(x, y)$ 在不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 3x+4y \geq 4 \\ y-3 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域上, 也在直线 $4x+3y+t=0$ 上, 则实数 t 的最大值

是 _____.

14. 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

15. 已知函数 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$, 若 $f(x) \leq f(\theta)$ 对任意实数 x 都成立, 则 $\frac{2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2+2\cos 2\theta}} =$ _____.

16. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 是圆 $C: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$ 上的一个点, 且线段 AF_2 的中点 B 在 E 的一条渐近线上, 若 $|F_1F_2| = 4$, 则 E 的离心率的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22, 23 小题为选做题, 考生根据要求作答.)

17 (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c\sin B \cos B + b\sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

(1) 求 A ;

(2) 若角 A 为钝角, $\triangle ABC$ 的面积为 S , 求 $\frac{S}{a^2}$ 的最大值.

18 (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $a_1 = 1, a_{n+1} = -\frac{2}{3}S_n + 1, b_n = 2\log_{\frac{1}{3}} a_n + 3$.

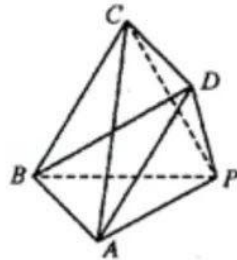
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{T_n}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 证明: $R_n < \frac{3}{4}$.

19 (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长 2 的菱形, $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 都是正三角形, 且平面 $PBC \perp$ 平面 PAB .

(1) 求证: $AC \perp PD$;

(2) 求三棱锥 $P-ABD$ 的体积.



20 (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 以线段 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 仅有 2 个不同的公共点, 且椭圆 C 上一点 P 到 F_1, F_2 的距离之和为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 经过定点 $M(t, 0)$ 的动直线 l 与 C 交于 E, F 两点, $G(4, 0)$, 若 $\angle EGM = \angle FGM$ 恒成立, 求点 P 到点 M 的最小距离.

22 (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - bx + \ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - 2y - 3 = 0$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - mx$ ($m \geq \frac{3}{2}$) 的两个极值点为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 若 $g(x_1) - g(x_2) \geq \lambda$ 恒成立, 求满足条件的 λ 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分) 全科免费下载公众号《高中僧课堂》

已知在平面直角坐标系 xOy 内, 点 $M(x, y)$ 在曲线 $C: \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数, $\theta \in R$) 上运动. 以坐标

原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$.

(1) 写出曲线 C 的标准方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 试求 $\triangle ABM$ 面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = 2|x| + |2x - m|$ ($m > 0$) 的图象关于直线 $x = 1$ 对称.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设 a, b 均为正数, 且 $a + b = m$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线