2024 届NCS高三摸底测试

数学 参考答案及评分意见

一．单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	C	D	A	B

二．多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
答案	BCD	AB	ACD	AB

三．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\sqrt{2}$；　　14．5；　　15．$\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$；　　16．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

四．解答题：共 70 分．17 题 10 分，其余大题 12 分一道，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【解析】（1）由已知，$\sin A\cos B+\sin B\cos A=ab\sin C$，

即 $\sin(A+B)=ab\sin C$，

$\sin C=ab\sin C$，所以 $ab=1$，　　………………………　3 分

故 ΔABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．　　………………………　5 分

（2）由余弦定理，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 可得 $\dfrac{a^2+b^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a^2+b^2=2$，　　………………………　7 分

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4$，即 $a+b=2$，

所以 ΔABC 的周长为 3．　　………………………　10 分

18．【解析】（1）因为 M,N 分别为 AC,AB 的中点，所以 $NM\,//\,BC$，

因为 $AB\perp BC$，所以 $AB\perp MN$，　　………………………　2 分

因为 $AB\perp PM$，$PM\cap MN=M$，

所以 $AB\perp$ 平面 PMN，所以 $AB\perp PN$；　　………………………　5 分

（2）因为 $AB=BC=2,BP=PM=3$，则 $NM=NB=1$，

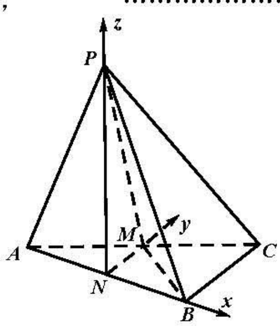
所以 $\Delta PNB\cong\Delta PNM$，因为 $AB\perp PN$，所以 $PN\perp NM$，

因为 $NB\cap NM=N$，所以 $PN\perp$ 平面 ABC，

因为 $AB=BC=2,BP=PM=3$，所以 $PN=2\sqrt{2}$，　　………………………　7 分

以 NB 为 x 轴，NM 为 y 轴，NP 为 z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $M(0,1,0)$，$B(1,0,0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{MB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{MP}=(0,-1,2\sqrt{2})$，

设平面 PMB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x-y=0\\-y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，得到 $\overrightarrow{n_1}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$，

平面 PMN 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$ ························ 10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$，

则二面角 $N-PM-B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. ························ 12 分

19.【解析】(1) 棱长为 $n+1$ 的正方体的体积为 $(n+1)^3$，

棱长为 n 的正方体的体积为 n^3， ························ 3 分

所以 $a_n=(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$； ························ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $a_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$， ························ 7 分

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=3\times1^2+3\times1+1+3\times2^2+3\times2+1+\cdots+3\times n^2+3\times n+1$

$=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+\cdots+n)+n=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$

又 $a_1+a_2+\cdots+a_n==2^3-1^3+3^3-2^3+\cdots+(n+1)^3-n^3=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$，

所以 $3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n=n^3+3n^2+3n$，

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ························ 12 分

20.【解析】(1) 因为 ΔOFM 的面积为 $\dfrac{3}{4}$，则有 $\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$，解得 $c=1$， ······2 分

又因为 $M(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆 C 上，则 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ························ 5 分

(2) 根据椭圆的对称性，欲证 A,D 关于 x 轴对称，

只需证 $k_{FA}=-k_{FD}$，即证 $k_{FA}+k_{FB}=0$，

设 $A(x_2,y_2),B(x_1,y_1)$，直线 AB 方程为 $x=my+4$，

由 $\begin{cases}x=my+4\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-24m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$ ························ 9 分

则$k_{FA}+k_{FB}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1(x_2-1)+y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

因为$y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)=2my_1y_2+3(y_1+y_2)=2m\times\dfrac{36}{3m^2+4}+3\dfrac{-24m}{3m^2+4}=0$

所以$k_{FA}+k_{FB}=0$，即A,D关于x轴对称. ························ 12分

21.【解析】（1）记选出甲乙两名队员参赛为事件A_1，

选出甲乙、丙丁各一人参赛为事件A_2，

选出丙丁两名队员参赛为事件A_3，

活动“党建优秀代表队”称号为事件B.

则$P(A_1)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，$P(A_2)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{3}$，$P(A_3)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$. ························ 3分

$P(B)=P(A_1B+A_2B+A_3B)$

$=\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{3}{4})^2\times[(\dfrac{2}{3})^2+2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}]+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2})+$

$\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{2}{3})^2\times[(\dfrac{1}{2})^2+2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}]=\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{18}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{5}{12}$. ························ 6分

（2）X的可能取值为：$0,60,100,120,160,200$，

$P(X=0)=(\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{1}{16}$，$P(X=60)=2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，

$P(X=100)=2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=120)=(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{16}$，

$P(X=160)=(\dfrac{3}{4})^2\times2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=200)=(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{4}$.

所以随机变量X的分布列为：

X	0	60	100	120	160	200
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

所以$EX=0\times\dfrac{1}{16}+60\times\dfrac{1}{8}+100\times\dfrac{1}{4}+120\times\dfrac{1}{16}+160\times\dfrac{1}{4}+200\times\dfrac{1}{4}=130$.

························ 12分

22.【解析】（1）$g(x)=a^x+a^{\frac{1}{x}},(a>1)$，

则$g'(x)=a^x\ln a-\dfrac{a^{\frac{1}{x}}\ln a}{x^2}=\dfrac{\ln a}{x^2}(x^2a^x-a^{\frac{1}{x}})$， ························ 2分

设$h(x)=x^2a^x-a^{\frac{1}{x}}$，则$h'(x)=2xa^x+x^2a^x\ln a+\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}\ln a>0$，

故$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，又因为$h(1)=0$，

故$g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增.

则$g(x)$的极小值为$g(1)=2a$，无极大值. ························ 5分

（2）因为 $f(\frac{1}{x})=1-x\cdot\log_a x$，所以 $1-x\log_a x=a^{\frac{1}{x}}$，

$\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}=\log_a(\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}})$，　　……………………… 7 分

令 $t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}$，显然 $t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

故有 $f(\frac{1}{x})=1-x\cdot\log_a x$ 两个正根，等价于 $h(t)=t-\log_a t$ 有两个零点.

$h'(t)=1-\frac{1}{\ln a\cdot t}$，显然 $t\in(0,\frac{1}{\ln a})$ 时，$h'(t)<0$，

$t\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，

故 $h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{\ln a})$ 递减，$(\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 递增，

$h(t)_{\min}=h(\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}-\log_a\frac{1}{\ln a}=\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)$，　　……………………… 9 分

令 $\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)<0$，所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a<1$，则 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$.

设 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，则 $a=e^{\frac{1}{x_0}}$，$a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{x_0}=(e^{\frac{1}{x_0}})^{x_0}=e$.

所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$，则 $e<\frac{1}{\ln a}$，则 $a\in(1,e^{\frac{1}{e}})$，

因为 $h(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}+1>0, h(a^a)=a^a-a=a(a^{a-1}-1)>0$.

此时存在两零点 x_1，x_2，其中 $x_1\in(\frac{1}{a},\frac{1}{\ln a})$，$x_2\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$，且 $h(x_1)=h(x_2)=0$.

故 $a\in(1,e^{\frac{1}{e}})$.　　……………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。