机密★启用前　　　　　　　　**姓名__________准考证号____________**

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学风向卷（二）

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x|x\leq m\}$，$N=\left\{x|y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}\right\}$.若 $M\cup N=\mathbf{R}$，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$[-1，+\infty)$　　B．$[4，+\infty)$　　C．$(-\infty，-1]$　　D．$(-\infty，4]$

【答案】B

【详解】本题考查函数的定义域、根据集合的并集运算求参数的范围．$N=\{x|x^2-3x-4>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$，则由 $M\cup N=\mathbf{R}$，得 $m\geq4$，故选 B．

【一题多解】若 $m=-1$，则 $0\notin M$，又 $0\notin N$，所以 $M\cup N\neq\mathbf{R}$，故排除 A，C，D，故选 B．

2．设 i 为虚数单位，复数 z_0 在复平面内对应的点为 $Z_0(1，2)$，且 $z_0\cdot z=3+i$，则$|z|=$(　　)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】B

【详解】本题考查复数的运算及几何意义、复数模的运算．由题意知 $z_0=1+2i$，所以 $z=\frac{3+i}{z_0}=\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i$，所以$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故选 B．

【一题多解】由题意知$|z_0|=\sqrt{5}$，所以由 $z_0\cdot z=3+i$，得$|z_0|\cdot|z|=|3+i|$，即$\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}$，即$|z|=\sqrt{2}$，故选 B．

3．已知$\left(a^2+\frac{2}{a}\right)^n$的展开式中最后三项的二项式系数之和为 16，则展开式中 a^4 的系数为(　　)

A．20

B．40

C．60

D．80

【答案】B

【考点】二项式定理及其应用

【详解】由二项式系数的性质可知，最后三项的二项式系数之和与前三项二项式系数之和相等，即$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=16$，即 $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$，整理得 $n^2+n-30=0$，解得 $n=5$ 或 $n=-6$(舍去)．二项展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(a^2)^{5-r}\left(\frac{2}{a}\right)^r=\mathrm{C}_5^r2^ra^{10-3r}$，令 $10-3r=4$，解得 $r=2$，所以 a^4 的系数为$\mathrm{C}_5^22^2=40$，故选 B．

4．某新能源汽车生产公司，为了研究某生产环节中两个变量 x，y 之间的相关关系，统计样本数据得到如下表格：

x_i	20	23	25	27	30
y_i	2	2.4	3	3	4.6

由表格中的数据可以得到 y 与 x 的经验回归方程为$y=\frac{1}{4}x+a$，据此计算，下列选项中残差的绝对值最小的样本数据是(　　)

A．(30，4.6)

B．(27，3)

C．(25，3)

D．(23，2.4)

【答案】C

【考点】回归分析

【详解】由题表中的数据可知，$x=\frac{1}{5}\times(20+23+25+27+30)=25$，$y=\frac{1}{5}\times(2+2.4+3+3+4.6)=3$，点(25，3)在经验回归直线$y=\frac{1}{4}x+a$上，故$a=-\frac{13}{4}$，则$y=\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}$.当 $x=30$ 时，$y=4.25$，残差的绝对值为 0.35；当 $x=27$ 时，$y=3.5$，残差的绝对值为 0.5；当 $x=25$ 时，$y=3$，残差的绝对值为 0；当 $x=23$ 时，$y=2.5$，残差的绝对值为 0.1.故选 C.

5．已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且 a_2 为 a_1，a_3+1 的等比中项，则数列$\{a_n\}$的前 10 项和为(　　)

A．88

B．108

C．130

D．154

【答案】C

【考点】数列的基本概念与等差数列的求和公式

【详解】依题意可知，$a_2^2=a_1\cdot(a_3+1)$，即$(a_1+2)^2=a_1\cdot(a_1+4+1)$，解得 $a_1=4$，则其前 10 项和 $S_{10}=10\times4+\frac{10\times9}{2}\times2=130$.故选 C.

【一题多解】依题意，$a_2^2=(a_2-2)\cdot(a_2+3)$，解得 $a_2=6$，$a_9=a_2+7d=6+14=20$，则其前 10 项和 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_2+a_9)}{2}=130$.

6．已知$\alpha\in(0，\pi)$，且 $3\cos 2\alpha+11=16\cos\alpha$，则 $\sin 2\alpha=$ (　　)

A．$-\frac{4\sqrt{5}}{9}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{9}$　　C．$-\frac{2\sqrt{5}}{9}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{9}$

【答案】D

【详解】本题考查三角恒等变换．由 $3\cos 2\alpha+11=16\cos\alpha$，得 $3(2\cos^2\alpha-1)-16\cos\alpha+11=0$，即 $3\cos^2\alpha-8\cos\alpha+4=0$，解得 $\cos\alpha=2$(舍去)或 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

$\because\alpha\in(0，\pi)$，$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.故选 D.

7．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，且$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$的最大值为(　　)

A．$-\sqrt{3}+4$

B．$\sqrt{3}+4$

C．$2\sqrt{3}-2$

D．$2\sqrt{3}+2$

【答案】D

【考点】平面向量的数量积以及模的运算

【详解】因为$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{2}$，所以向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.不妨设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$为 x 轴正方向建立平面直角坐标系(图略)，则 $C(2，0)$，$B(1，\sqrt{3})$或 $B(1，-\sqrt{3})$，设 $A(x，y)$，当 B 点坐标为$(1，\sqrt{3})$时，因为$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，所以$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=0$，即$(1-x，\sqrt{3}-y)\cdot(x-3，y-3\sqrt{3})=0$，即$(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=4$，所以 A 点轨迹是以$(2，2\sqrt{3})$为圆心，半径为 2 的圆，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$的最大值为$\sqrt{(2-2)^2+\left(2\sqrt{3}-0\right)^2}+2=2\sqrt{3}+2$，同理，当 B 点坐标为$(1，-\sqrt{3})$时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$的最大值为 $2\sqrt{3}+2$.故选 D.

8．已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点，经过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，D 为线段 AB 的中点，且 $F_1D\perp l$，$4|F_2B|=|AB|$，则双曲线 C 的离心率为(　　)

A．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D．2

【答案】C

【分析】连接 AF_1，$BF_1F_1D\perp lD$ *为线段AB的中点*$\dashrightarrow|AF_1|=|BF_1|$*根据双曲线定义*$\dashrightarrow|BF_1|=t+2a$，$|AF_1|=5t-2a\to|F_1D|=\sqrt{5}a\to5a^2+9a^2=4c^2\to e=\frac{\sqrt{14}}{2}$

【考点】双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系

【详解】依题意，不妨设 $4|F_2B|=|AB|=4t(t>0)$，连接 AF_1，BF_1(图略)，因为 D 为线段 AB 的中点，且 $F_1D\perp l$，所以$|AF_1|=|BF_1|$.由双曲线定义可得$|BF_1|=t+2a$，$|AF_1|=5t-2a$，所以 $t+2a=5t-2a$，解得 $t=a$.在 $Rt\triangle F_1DB$ 中，$|F_1D|=\sqrt{|BF_1|^2-|DB|^2}=\sqrt{5}a$，在 $Rt\triangle F_1DF_2$ 中，$|F_1D|^2+|DF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $5a^2+9a^2=4c^2$，所以离心率 $e=\frac{\sqrt{14}}{2}$，故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．下列不等式成立的是(　　)

A．$\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$

B．$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\pi^{\frac{1}{2}}$

C．$\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$

D．$\log_4 3<\log_6 5$

【答案】BCD

【详解】本题考查函数的性质以及大小比较．

对于 A，$\because 0<\sin 1<1$，$\therefore \log_2(\sin 1)<0$，$2^{\sin 1}>1$，

$\therefore \log_2(\sin 1)<2^{\sin 1}$，故 A 错误；

对于 B，$\because \left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\left(\frac{1}{\pi}\right)^0=1$，$\pi^{\frac{1}{2}}>\pi^0=1$，$\therefore \left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\pi^{\frac{1}{2}}$，故 B 正确；

对于 C，$\because \sqrt{7}-\sqrt{5}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，$\sqrt{6}-2=\frac{2}{\sqrt{6}+2}$，且$\sqrt{7}+\sqrt{5}>\sqrt{6}+2$，

$\therefore \sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$，故 C 正确；

对于 D，$\because \log_3 4=\log_3 3+\log_3\frac{4}{3}=1+\log_3\frac{4}{3}$，$\log_5 6=\log_5 5+\log_5\frac{6}{5}=1+\log_5\frac{6}{5}$，又 $\log_3\frac{4}{3}>\log_3\frac{6}{5}=\frac{\log_5\frac{6}{5}}{\log_5 3}>\log_5\frac{6}{5}$，$\therefore \log_3 4>\log_5 6$，则$\frac{1}{\log_3 4}<\frac{1}{\log_5 6}$，$\therefore \log_4 3<\log_6 5$，故 D 正确．

故选 BCD．

10．记 T 为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期，且 $T\in(2，3)$，函数在 $x=\frac{3\pi}{2}$处取得最大值 3，则(　　)

A．$b=3$

B．$f(x)$的最小正周期为$\frac{4\pi}{5}$

C．$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{5}]$上单调递减

D. 将函数 $f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后与函数 $y=-\sin\frac{5}{2}x$ 的图像重合

【答案】BCD

【考点】三角函数的图像及其性质

【详解】对于 A 选项，依题意，因为函数在 $x=\frac{3\pi}{2}$处取得最大值 3，所以 $b=2$，所以 A 选项不正确；

对于 B 选项，由$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\omega=\frac{4k}{3}-\frac{1}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $T\in(2，3)$，所以$\omega\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，所以$\omega=\frac{5}{2}$，所以 $f(x)=\cos(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4})+2$，函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{\frac{5}{2}}=\frac{4\pi}{5}$，所以 B 选项正确；

对于 C 选项，当 $x\in[0,\frac{\pi}{5}]$时，$\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，函数 $f(x)$单调递减，所以 C 选项正确；

对于 D 选项，将 $f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度得 $y=\cos[\frac{5}{2}(x+\frac{\pi}{10})+\frac{\pi}{4}]+2=\cos\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+2=-\sin\frac{5}{2}x+2$ 的图像，再向下平移 2 个单位长度后得 $y=-\sin\frac{5}{2}x$ 的图像，所以 D 选项正确．

11．已知圆 C：$x^2+y^2-2x\cos\theta-2y\sin\theta-3=0$，$\theta\in\mathbf{R}$，则(　　)

A．圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相内切

B．直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-3=0(\alpha\in\mathbf{R})$与圆 C 相离

C．圆 C 上到直线 $x+y=0$ 的距离等于 2 的点只有两个

D．过直线 $x+y=4\sqrt{2}$上任一点 M 作圆 C 的切线，切点分别为 E，F，则四边形 $MECF$ 面积的最小值为 $2\sqrt{5}$

【答案】ACD

【考点】直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系

【详解】对于 A 选项，依题意，圆 C 的标准方程为$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=4$，$\theta\in\mathbf{R}$，圆心 $C(\cos\theta，\sin\theta)$，半径为 2，而圆心 C 的轨迹为单位圆 $x^2+y^2=1$，所以圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相内切，所以 A 选项正确；

对于 B 选项，圆心 $C(\cos\theta, \sin\theta)$到直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-3=0(\alpha\in R)$的距离 $d=\frac{|\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha-3|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=|\cos(\theta-\alpha)-3|\in[2，4]$(提示：通过圆心到直线的距离及圆的半径判断直线与圆的位置关系)，当 $d=2$ 时，直线与圆 C 相切，所以 B 选项不正确；

对于 C 选项，圆心 $C(\cos\theta，\sin\theta)$到直线 $x+y=0$ 的距离 $d'=\frac{|\cos\theta+\sin\theta|}{\sqrt{2}}=|\sin(\theta+\frac{\pi}{4})|\in[0，1]$，则

圆 C 上到直线 $x+y=0$ 的距离等于 2 的点只有两个，所以 C 选项正确；

对于 D 选项，四边形 $MECF$ 的面积 $S=2S_{\triangle MEC}=2\times\frac{1}{2}\times|EC|\times|ME|=2|ME|$，

又$|ME|=\sqrt{|MC|^2-|CE|^2}=\sqrt{|MC|^2-4}$，

$|MC|=\frac{|\cos\theta+\sin\theta-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-4\right|\in[3,5]$，

所以$|MC|_{min}=3$，所以四边形 $MECF$ 的面积的最小值为 $2|ME|=2\sqrt{3^2-4}=2\sqrt{5}$，所以 D 选项正确.

12．已知球 O 的表面积为 36π，正四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点均在球 O 的表面上，设 $AB=a$，则(　　)

A．当 $a=3\sqrt{2}$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积为 $18\sqrt{3}$

B．当 $a=3\sqrt{2}$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$

C．当 $a\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最小值为 $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D．当 $a\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最大值为 18

【答案】AC

【分析】球 O 的表面积为 36π→球 O 的半径 $R=3$→设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 h→对于 A 选项和 B 选项，可以直接求得其侧面积以及侧面与底面所成角的正切值；对于 C 选项和 D 选项，对球心的位置进行分类讨论，再根据体积的函数表达式，通过导数求得最值

【考点】正四棱锥及其外接球

【详解】设球 O 的半径为 R，则 $4\pi R^2=36\pi$，解得 $R=3$，设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 h.对于 A 选项和 B 选项，$AB=a=3\sqrt{2}$，所以 $BD=6$，即为球 O 的直径，此时球心 O 即为正方形 $ABCD$ 的中心，此时侧棱长 $SA=3\sqrt{2}$，即正四棱锥侧面是边长为$3\sqrt{2}$的正三角形，所以正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=18\sqrt{3}$.取 AB 的中点 E，连接 SE，OE，SO(图略)，易知$\angle SEO$ 即为正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角的平面角，$\tan\angle SEO=\frac{SO}{OE}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$，所以 A 选项正确，B 选项不正确．对于 C 选项和 D 选项，当正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面和顶点在球心的同侧时，$h=3-\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=3-\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}$，

此时正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times a^2\times\left(3-\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}\right)$.

令$\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}=t$，$t\in[0,2\sqrt{2}]$，所以 $a^2=18-2t^2$，$t\in[0,2\sqrt{2}]$，

所以 $V=f(t)=\left(6-\frac{2}{3}t^2\right)(3-t)=18-6t-2t^2+\frac{2}{3}t^3$，$t\in[0,2\sqrt{2}]$.

$f'(t)=-6-4t+2t^2=2(t-3)(t+1)$，则 $f'(t)<0$，函数 $f(t)$在$[0,2\sqrt{2}]$上单调递减，所以函数 $f(t)$在 $t=2\sqrt{2}$处取得最小值 $f(2\sqrt{2})=2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$，最大值为 $f(0)=18$，即正四棱锥 $S-ABCD$ 体积的最大值为 18，最小值为 $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

当正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面和顶点在球心的两侧时，$h=3+\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=3+\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}$，

此时正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times a^2\times\left(3+\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}\right)$，

令$\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}=m$，$m\in[0,2\sqrt{2}]$，所以 $a^2=18-2m^2$，$m\in[0,2\sqrt{2}]$，

所以 $V=g(m)=\left(6-\frac{2}{3}m^2\right)(3+m)=18+6m-2m^2-\frac{2}{3}m^3$，

$g'(m)=6-4m-2m^2=-2(m-1)(m+3)$，当 $m\in(0,1)$时，$g'(m)>0$，函数 $g(m)$在$(0,1)$上单调递增，当 $m\in(1,2\sqrt{2})$时，$g'(m)<0$，函数 $g(m)$在$(1,2\sqrt{2})$上单调递减，所以函数 $g(m)$在 $m=1$ 处取得极大值 $g(1)=\frac{64}{3}$，且 $g(0)=18$，$g(2\sqrt{2})=2+\frac{4\sqrt{2}}{3}$，即正四棱锥 $S-ABCD$ 体积的最大值为$\frac{64}{3}$，最小值为 $2+\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

综上，当 $a\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最小值为 $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$，最大值为$\frac{64}{3}$，所以 C 选项正确，D 选项不正确．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\geq5)=P(X\leq-1)=0.2$，则 $P(-1<X<2)=$________.

【答案】0.3

【详解】本题考查正态分布．由题意，随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\geq5)=P(X\leq-1)=0.2$，根据正态分布曲线的对称性，可得$\mu=\frac{5+(-1)}{2}=2$，$\therefore P(-1<X<2)=\frac{1}{2}-P(X\leq-1)=0.5-0.2=0.3$.

【点睛】考虑有关正态分布的概率问题时，利用正态分布曲线的对称性可以简化运算.

14．已知曲线 $y=f(x)=(x-a)e^x$ 在 $x=-1$ 处的切线与直线 $y=-2x+1$ 垂直，则实数 $a=$________.

【答案】$-\frac{e}{2}$

【考点】导数的几何意义、两直线的位置关系

【详解】依题意可得 $f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$，$f'(-1)=-\frac{a}{e}$，又 $f'(-1)\times(-2)=-1$，所以 $a=-\frac{e}{2}$.

15．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 B_1C_1 的中点，N 为底面 $ABCD$ 上一动点，且直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角为$\frac{\pi}{3}$，则动点 N 的轨迹的长度为________.

【答案】$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

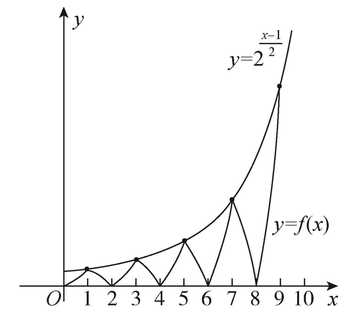
【考点】直线与平面所成角，动点的轨迹长度

【详解】取棱 BC 的中点 E，连接 ME，EN(图略)，则 $ME\perp$底面 $ABCD$，即$\angle MNE$ 就是直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角，即$\angle MNE=\frac{\pi}{3}$.在 $Rt\triangle MEN$ 中，$ME=2$，$\angle MNE=\frac{\pi}{3}$，$NE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以点 N 的轨迹是以 E 为圆心，半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的圆在底面正方形 $ABCD$ 内的部分.不妨设圆 E 与棱 AB，CD 的交点分别为 F，H，连接 EF(图略)，所以 $\cos\angle BEF=\frac{BE}{EF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\angle BEF=\frac{\pi}{6}$，根据对称性，知$\angle HEC=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle HEF=\pi-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，因此动点 N 的轨迹的长度为$\frac{2\pi}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$.

16．已知函数 $f(x)$的定义域为$[0，+\infty)$，且 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\in[0|1),\\ \log_2(3-x), x\in[1|2),\\ 2f(x-2), x\in[2|+\infty),\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)-2^{\frac{x-1}{2}}$在区间$[0, a]$内的所有零点为 $x_i(i=1, 2, 3, \dots, n)$. 若$\sum_{i=1}^{n}x_i=16$，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】[7，9)

【分析】函数 $g(x)=f(x)-2^{\frac{x-1}{2}}$的零点问题→$y=f(x)$的图像与 $y=2^{\frac{x-1}{2}}$的图像的交点横坐标问题→作出函数 $y=f(x)$和 $y=2^{\frac{x-1}{2}}$在区间$[0，+\infty)$上的图像→数形结合得出结果



【考点】函数零点问题

【详解】函数 $g(x)=f(x)-2^{\frac{x-1}{2}}$的零点转化为函数 $y=f(x)$的图像与 $y=2^{\frac{x-1}{2}}$的图像的交点横坐标问题．作出函数 $y=f(x)$在区间$[0，2)$上的图像，又当 $x\geq2$ 时，$f(x)=2f(x-2)$，所以当 $x\geq2$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$，其图像如图所示.

作出 $y=2^{\frac{x-1}{2}}$，$x\geq0$ 的图像，由图像可得，$x_1=1$，$x_2=3$，$x_3=5$，…，若$\sum_{i=1}^{n}x_i=16$，则 $n=4$，即 $x_4=7$，故实数 a 的取值范围是[7，9).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(10 分)已知等差数列$\{a_n\}$，$3a_2=a_4+2$，$a_2a_3=a_8$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $a_{n+1}-a_n>0$，且数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1$，$b_{n+1}=\begin{cases}a_n, n为奇数,\\ 2^n-b_n, n为偶数,\end{cases}$ 求数列$\{b_n\}$的前 14 项的和.

【考点】等差数列的通项公式，数列奇、偶项求和

【详解】 (1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，依题意有$\begin{cases}3(a_1+d)=a_1+3d+2,\\ (a_1+d)(a_1+2d)=a_1+7d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=1,\\ d=0,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$ 或 $a_n=1$，$n\in N^*$.

(2)若 $a_{n+1}-a_n>0$，则 $a_n=2n-1$，$b_1=a_1=1$，

所以 $b_{n+1}=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^n-b_n, n为偶数,\end{cases}$

所以 $b_2=a_1=1$，$b_3=2^2-b_2$，$b_3+b_2=2^2$；$b_5=2^4-b_4$，$b_5+b_4=2^4$；

$b_7=2^6-b_6$，$b_7+b_6=2^6$；$b_9=2^8-b_8$，$b_9+b_8=2^8$；

$b_{11}=2^{10}-b_{10}$，$b_{11}+b_{10}=2^{10}$；$b_{13}=2^{12}-b_{12}$，$b_{13}+b_{12}=2^{12}$；

$b_{14}=a_{13}=25$.

则数列$\{b_n\}$的前 14 项的和

$S_{14}=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\dots+b_{12}+b_{13}+b_{14}$

$=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\dots+(b_{12}+b_{13})+b_{14}$

$=1+2^2+2^4+\dots+2^{12}+25$

$=\frac{1\times(1-4^7)}{1-2^2}+25$

$=\frac{4^7+74}{3}=5\ 486.$

18．(12 分)已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $B=2C$，$C\neq A$．

(1)证明：$b^2-c^2=ac$；

(2)若 AC 边上的中线 $BD=\sqrt{2}a$，求 $\tan\angle ABC$．

【考点】利用正弦定理、余弦定理解三角形

【详解】

(1)在△ABC 中，$B=2C$，则 $\sin B=\sin 2C=2\sin C\cos C$，则 $b=2c\cos C$．

又 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以 $b=2c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

整理得 $ab^2=a^2c+b^2c-c^3$，

即$(a-c)b^2=c(a^2-c^2)$，$(a-c)b^2=c(a-c)(a+c)$，

因为 $C\neq A$，所以 $a\neq c$，所以 $b^2=c^2+ac$，即 $b^2-c^2=ac$.

(2)依题意，$2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$，则 $4\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})^2=a^2+c^2+2ac\cos\angle ABC$

即 $8a^2=a^2+c^2+2ac\cos\angle ABC$，所以$\frac{7a^2-c^2}{2ac}=\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

所以 $c^2-ac-6a^2=(c+2a)(c-3a)=0$，所以 $c=-2a$(舍)或 $c=3a$，

则 $b=2\sqrt{3}a$，

$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{3}$，所以 $\tan\angle ABC=-2\sqrt{2}$.

19．(12 分)"坚持'五育'并举，全面发展素质教育，强化体育锻炼"是我们现阶段教育必须坚持的．某高中学校鼓励学生自发组织各项体育比赛活动，甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛，规定：每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局，首先获得 5 分者获胜，比赛结束．假设每局比赛甲获胜的概率都是$\frac{3}{5}$.

(1)求比赛结束时恰好打了 6 局的概率；

(2)若甲以 3∶1 的比分领先时，记 X 表示到比赛结束时还需要比赛的局数，求 X 的分布列及数学期望．

【考点】本题考查离散型随机变量的分布列以及数学期望．

【详解】(1)比赛结束时恰好打了 6 局，

甲获胜的概率 $P_1=C_5^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{486}{3125}$,

乙获胜的概率 $P_2=C_5^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^4\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{3125}$,

所以比赛结束时恰好打了 6 局的概率 $P=P_1+P_2=\frac{486}{3125}+\frac{96}{3125}=\frac{582}{3125}$.

(2)X 的所有可能取值为 2，3，4，5，$P(X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$,

$P(X=3)=C_2^1\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$,

$P(X=4)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^4=\frac{124}{625}$,

$P(X=5)=C_4^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}+C_4^3\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{625}$.

所以 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{124}{625}$	$\frac{96}{625}$

故数学期望 $E(X)=2\times\frac{9}{25}+3\times\frac{36}{125}+4\times\frac{124}{625}+5\times\frac{96}{625}=\frac{1966}{625}$.

【点睛】

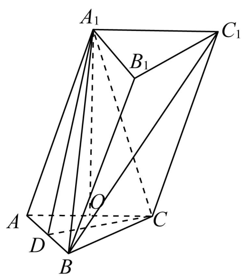
(1)本题的关键是比赛结束时恰好打了 6 局分两种情况：甲胜，乙胜；

(2)分析得到 X 的所有可能取值为 2，3，4，5，求出相应的概率．

20．(12 分)已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为正三角形，A_1 在底面 ABC 上的射影 O 恰好为棱 AC 的中点，且 $A_1O=3$，直线 A_1B 与平面 A_1C_1CA 所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

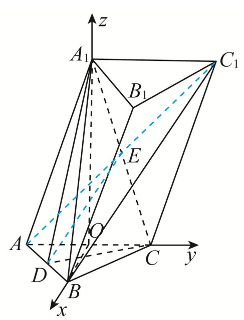
(1)在棱 AB 上是否存在一点 D，使得 BC_1∥平面 A_1CD?

(2)若 D 为棱 AB 的中点，求平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角的余弦值．



【考点】空间直线与平面平行的判定以及平面与平面的夹角的余弦值

【详解】(1)在棱 AB 上存在点 D，且 D 为棱 AB 的中点时，使得 BC_1∥平面 A_1CD，理由如下：



如图，连接 AC_1 交 A_1C 于点 E，连接 DE，则 DE 为△ABC_1 的中位线，所以 DE∥BC_1.

又因为 DE⊂平面 A_1CD，BC_1⊄平面 A_1CD，

所以 BC_1∥平面 A_1CD.

即 D 为棱 AB 的中点时，BC_1∥平面 A_1CD.

(2)依题意，A_1O⊥平面 ABC，A_1O⊂平面 A_1C_1CA，所以平面 A_1C_1CA⊥平面 ABC，连接 BO，又△ABC 是正三角形，所以 BO⊥AC，又平面 A_1C_1CA∩平面 ABC＝AC，所以 BO⊥平面 A_1C_1CA．在 Rt△A_1BO 中，∠BA_1O 即为直线 A_1B 与平面 A_1C_1CA 所成的角，即∠$BA_1O=\frac{\pi}{6}$，又 $A_1O=3$，所以 $BO=\sqrt{3}$，则 $AB=2$.

以 O 为坐标原点，OB，OC，OA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A_1(0，0，3)$，$C_1(0，2，3)$，$B(\sqrt{3}，0，0)$，$C(0，1，0)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0，2，0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3}，0，-3)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0，1，-3)$，$\overrightarrow{A_1D}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-3\right)$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $u=(x_1，y_1，z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C_1}\cdot u=2y_1=0,\\ \overrightarrow{A_1B}\cdot u=\sqrt{3}x_1-3z_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=0$，$z_1=1$，

$u=(\sqrt{3}，0，1)$.

设平面 A_1CD 的法向量为 $v=(x_2，y_2，z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C}\cdot v=y_2-3z_2=0,\\ \overrightarrow{A_1D}\cdot v=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2-3z_2=0,\end{cases}$

不妨取 $z_2=1$，则 $y_2=3$，$x_2=3\sqrt{3}$，$v=(3\sqrt{3}，3，1)$.

设平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角为θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle u，v\rangle|=\frac{|u\cdot v|}{|u||v|}=\frac{10}{2\times\sqrt{37}}=\frac{5\sqrt{37}}{37}$，

所以平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角的余弦值为$\frac{5\sqrt{37}}{37}$.

21．(12 分)已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为 6，且经过点$(-\sqrt{6}，2)$，椭圆的左顶点到抛物线Γ：$y^2=2px(p>0)$的准线的距离为 2，且抛物线的准线和椭圆相交．

(1)求椭圆 C 和抛物线Γ的方程．

(2)斜率为 $k(k\neq0)$的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，与抛物线Γ交于 A，B 两点，当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$时，在 x 轴上是否存在定点 T，使得∠MTN 的平分线恰好为 x 轴？若存在，求出定点 T 的坐标；若不存在，请说明理由．

【分析】

(2)设直线 l：$y=kx+m(k\neq0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$→直线的方程和抛物线的方程联立→x_1+x_2，x_1x_2 $\overset{\rightarrow}{}\cdot\overrightarrow{OB}=-4OA$—— →$m=-2k$→$l$：$y=k(x-2)$→设 $M(x_3，y_3)$，$N(x_4，y_4)$，直线方程与椭圆方程联立→x_3+x_4，x_3x_4 *直线TM的斜率与直线TN的斜率之和为*0—— →$T(\frac{9}{2}，0)$

【考点】椭圆、抛物线的方程以及直线与椭圆、抛物线的位置关系

【详解】(1)由已知得$\begin{cases}2b=6,\\ \frac{2^2}{a^2}+\frac{(-\sqrt{6})^2}{b^2}=1,\end{cases}$

∴$a^2=12$，$b^2=9$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$.

∴椭圆 C 的左顶点为$(-3，0)$.

∴$(-\frac{p}{2})-(-3)=2$，解得 $p=2$，

∴抛物线Γ的方程为$y^2=4x$.

(2)由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0.

设直线 l 的方程为$y=kx+m(k\neq0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\y^2=4x,\end{cases}$消去 y 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$.

∵$\Delta_1=(2km-4)^2-4k^2m^2=-16km+16>0$，∴$km<1$，

∴$x_1+x_2=\frac{4-2km}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{m^2}{k^2}$，

∴$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{km(4-2km)}{k^2}+2m^2=\frac{4m}{k}$.

则$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2}{k^2}+\frac{4m}{k}=-4$，

∴$\left(\frac{m}{k}+2\right)^2=0$，∴$\frac{m}{k}=-2$，

∴$m=-2k$，此时 $km=-2k^2<0$.

∴直线 l 的方程为$y=k(x-2)$.

假设在 x 轴上存在点 $T(x_0，0)$，使得 x 轴平分$\angle MTN$，则直线 TM 的斜率与直线 TN 的斜率之和为 0.

(将“几何特征”转化为两直线斜率之间的“数量关系”)

设 $M(x_3，y_3)$，$N(x_4，y_4)$，

由$\begin{cases}y=k(x-2),\\\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1,\end{cases}$消去 y 得$(3k^2+4)x^2-12k^2x+12k^2-36=0$，

∴$\Delta_2=(12k^2)^2-4(3k^2+4)(12k^2-36)=60k^2+144>0$ 恒成立，

∴$x_3+x_4=\frac{12k^2}{3k^2+4}$，$x_3x_4=\frac{12k^2-36}{3k^2+4}$.

∵$k_{TM}+k_{TN}=\frac{y_3}{x_3-x_0}+\frac{y_4}{x_4-x_0}=0$，

∴$k(x_3-2)(x_4-x_0)+k(x_4-2)(x_3-x_0)=0$，

∴$2x_3x_4-(x_0+2)(x_3+x_4)+4x_0=0$，

∴$\frac{24k^2-72}{3k^2+4}-(x_0+2)\times\frac{12k^2}{3k^2+4}+4x_0=0$，

(得到关于 x_0 的方程，进而得出 x_0 的值)

解得 $x_0=\frac{9}{2}$.

∴在 x 轴上存在定点 $T\left(\frac{9}{2},0\right)$，使得 x 轴平分$\angle MTN$.

22．(12 分)已知函数$f(x)=\frac{x}{e^x}$，$g(x)=\frac{lnx}{x}$.

(1)求证：函数 $f(x)$与函数 $g(x)$具有相同的最大值，并分别指出取得最大值时 x 的值；

(2)若方程 $f(x)=a$ 和 $g(x)=a$ 共有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，求证：x_1，x_2，x_3 成等比数列.

【分析】

(2)由(1)可知 $f(x)$，$g(x)$的单调性、最值→在$(1，e)$内，存在唯一 x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)=a\to x_0=x_2\to0<x_1<1<x_2<e<x_3\to\frac{x_1}{ex_1}=\frac{x_2}{ex_2}=\frac{lnx_2}{x_2}=\frac{lnx_3}{x_3}\to f(x_1)=f(\ln x_2)\to x_1=\ln x_2\to g(ex_2)=g(x_3)\to ex_2=x_3\to x_2^2=ex_2\ln x_2=x_3x_1$→得证

【考点】函数的最值以及导数的综合应用

【详解】

(1)由题意，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}(x\in\mathbf{R})$，当 $x\in(-\infty，1)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-\infty，1)$上单调递增；当 $x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减.

则函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=\frac{1}{e}$.

$g(x)=\frac{lnx}{x}(x>0)$，$g'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}(x>0)$，当 $x\in(0，e)$时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$在$(0，e)$上单调递增；当 $x\in(e，+\infty)$时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$在$(e，+\infty)$上单调递减.

则函数 $g(x)$在 $x=e$ 处取得最大值 $g(e)=\frac{1}{e}$.

因为 $f(1)=g(e)=\frac{1}{e}$，所以函数 $f(x)$与函数 $g(x)$具有相同的最大值，且取得最大值时 x 的值分别为 1，e.

(2)由(1)知，$f(0)=0$，$f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{e}$，函数 $f(x)$在$(-\infty，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减.

$g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$，$g(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

$g(1)=0$，$f(e)=e^{1-e}$，$0<e^{1-e}<\frac{1}{e}=e^{-1}$.

若方程 $f(x)=a$ 和 $g(x)=a$ 共有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，

则在$(1，e)$内，存在唯一 x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)=a$，

所以 $x_0=x_2$，又 $0<x_1<1<x_2<e<x_3$，

则$\frac{x_1}{ex_1}=\frac{x_2}{ex_2}=\frac{lnx_2}{x_2}=\frac{lnx_3}{x_3}$,

所以$f(x_1)=f(\ln x_2)$，又因为 $0<x_1<1<x_2<e<x_3$，所以 $x_1=\ln x_2$，同理 $g(ex_2)=g(x_3)$，$ex_2\in(e，e^e)$，$x_3\in(e，+\infty)$，而 $g(x)$在$(e，+\infty)$上单调递减，所以 $ex_2=x_3$.

又因为$f(x_2)=g(x_2)$，即$\frac{x_2}{ex_2}=\frac{lnx_2}{x_2}$，所以 $x_2^2=ex_2\ln x_2=x_3x_1$，所以 x_1，x_2，x_3 成等比数列.