

数学试题

2023.03

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $\frac{5}{i-2}$  的共轭复数为

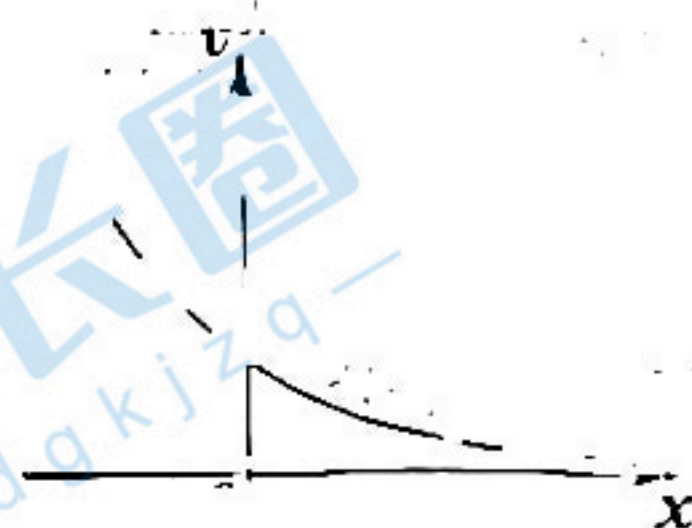
- A.  $i+2$                       B.  $i-2$                       C.  $-2-i$                       D.  $2-i$

2. 已知集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | 4x^2 - 4x - 15 < 0\}$ , 则

- A.  $\exists x \in A, x \notin B$                       B.  $\forall x \in B, x \in A$   
 C.  $\exists x \in B, x \in A$                       D.  $\forall x \in A, x \notin B$

3. 指数函数  $y = a^x$  的图象如图所示, 则  $y = ax^2 + x$  图象顶点横坐标的取值范围是

- A.  $(-\infty, -\frac{1}{2})$       B.  $(-\frac{1}{2}, 0)$       C.  $(0, \frac{1}{2})$       D.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$



4. 党的十八大以来十年, 是砥砺奋进、矢志“为中国人民谋幸福”的十年。在党中央的正确领导下, 我国坚定不移贯彻新发展理念, 着力推进高质量发展, 推动构建新发展格局, 实施供给侧结构性改革, 制定一系列具有全局性意义的区域重大战略, 经济实力实现历史性跃升。国内生产总值(GDP)从五十四万亿元增长到一百一十四万亿元, 稳居世界第二位。下表是 2022 年我国大陆 31 省市区 GDP 数据。

准考证号  
姓名  
学校



2022年中国大陆31省市GDP

排名	省份	GDP(单位: 亿元)	排名	省份	GDP(单位: 亿元)
1	广东省	129 118.6	17	辽宁省	28 975.1
2	江苏省	122 875.6	18	云南省	28 954.2
3	山东省	87 435.1	19	广西壮族自治区	26 300.9
4	浙江省	77 715.4	20	山西省	25 642.6
5	河南省	61 345.1	21	内蒙古自治区	23 158.7
6	四川省	56 749.8	22	贵州省	20 164.6
7	湖北省	53 734.9	23	新疆维吾尔自治区	17 741.3
8	福建省	53 109.9	24	天津市	16 311.3
9	湖南省	48 670.4	25	黑龙江省	15 901.0
10	安徽省	45 045.0	26	吉林省	13 070.2
11	上海市	44 652.8	27	甘肃省	11 201.6
12	河北省	42 370.4	28	海南省	6 818.2
13	北京市	41 610.9	29	宁夏回族自治区	5 069.6
14	陕西省	32 772.7	30	青海省	3 610.1
15	江西省	32 074.7	31	西藏自治区	2 132.6
16	重庆市	29 129.0			

则由各省市GDP组成的这组数据的第75百分位数为(单位: 亿元)

- A. 16311.3      B. 17741.3      C. 48670.4      D. 53109.9

5. 已知  $a, b, c$  是同一平面内两两不共线的单位向量, 下列结论可能成立的是

A.  $b \cdot (a+c) = 2$

B.  $(a+b) \parallel (a-b)$

C. 存在不全为0的实数  $\lambda, \mu$ , 使  $\lambda a + \mu b = 0$

D. 若  $a+b+c=0$ , 则  $|a-b| = \sqrt{3}$

6. 某地区有20000名考生参加了高三第二次调研考试. 经过数据分析, 数学成绩  $X$  近似服从正态分布  $N(72, 8^2)$ , 则数学成绩位于  $[80, 88]$  的人数约为

参考数据:  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ,

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ .

A. 455

B. 2718

C. 6346

D. 9545



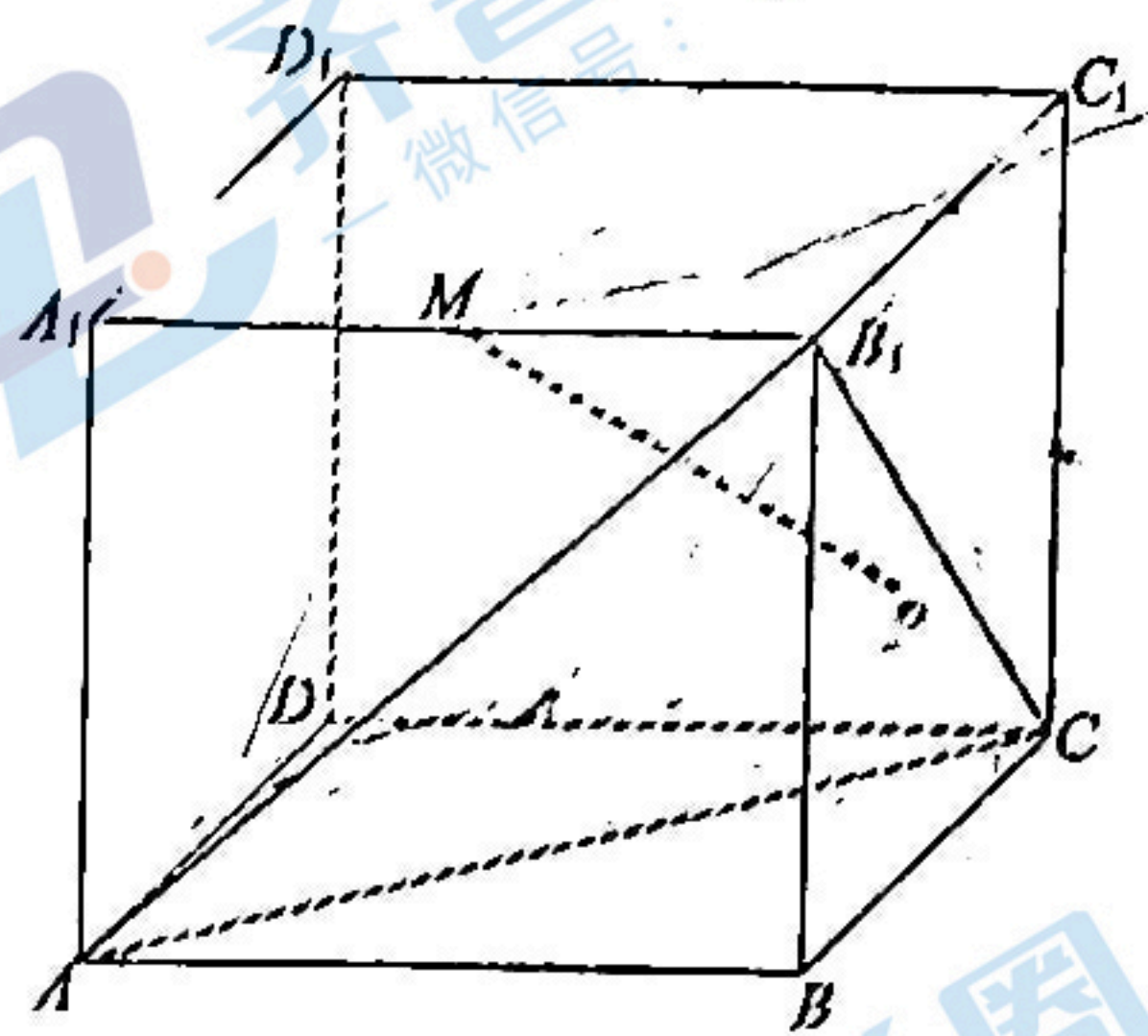
7. 如图, 在棱长为1的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  是  $A_1B_1$  的中点, 点  $P$  是侧面  $CDD_1C_1$  上的动点, 且  $MP \parallel$  平面  $AB_1C$ , 则线段  $MP$  长度的取值范围为

A.  $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$

B.  $[1, \frac{\sqrt{6}}{2}]$

C.  $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}]$

D.  $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$



8. 已知  $f(x) = \sqrt{\ln x + 9x - a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 曲线  $y = \cos x + 2$  上存在点  $(x_0, y_0)$ , 使得

$f(f(y_0)) = y_0$ , 则  $a$  的范围是

A.  $(8, 18 + \ln 3)$

B.  $[8, 18 + \ln 3]$

C.  $(9, 27 + \ln 3)$

D.  $[9, 27 + \ln 3]$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 已知曲线  $C_1: 5x^2 + y^2 = 5$ ,  $C_2: x^2 - 4y^2 = 4$ , 则

A.  $C_1$  的长轴长为  $\sqrt{5}$

B.  $C_2$  的渐近线方程为  $x \pm 2y = 0$

C.  $C_1$  与  $C_2$  的离心率互为倒数

D.  $C_1$  与  $C_2$  的焦点相同

10. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列, 前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 10$ , 公差  $d = -2$ , 则

A.  $S_4 = S_7$

B. 当  $n = 5$  或  $6$  时,  $S_n$  取得最小值为  $30$

C. 数列  $\{a_n\}$  的前  $10$  项和为  $50$

D. 当  $n \leq 2023$  时,  $\{a_n\}$  与数列  $\{3m + 10\} (m \in \mathbb{N}^*)$  共有  $671$  项互为相反数

AC



11. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象过点  $M(0, \frac{A}{2})$

和  $N(\pi, 0)$ ,  $f(x)$  的最小正周期为  $T$ , 则

A.  $T$  可能取  $\frac{12\pi}{7}$

B.  $f(x)$  在  $(0, 4\pi)$  上至少有 3 个零点

C. 直线  $x = \frac{8\pi}{11}$  可能是曲线  $y = f(x)$  的一个对称轴

D. 若函数  $f(x)$  的图象在  $[0, 2\pi]$  上的最高点和最低点共有 4 个, 则  $\omega = \frac{11}{6}$

12. 已知函数  $f(x) = (x-1)^3 - ax - b + 1$ , 则下列结论正确的是

A. 当  $a = 3$  时, 若  $f(x)$  有三个零点, 则  $b$  的取值范围为  $(-4, 0)$

B. 若  $f(x)$  满足  $f(2-x) = 3 - f(x)$ , 则  $a + b = -1$

C. 若过点  $(2, m)$  可作出曲线  $g(x) = f(x) - 3x + ax + b$  的三条切线, 则  $-5 < m < -4$

D. 若  $f(x)$  存在极值点  $x_0$ , 且  $f(x_0) = f(x_1)$ , 其中  $x_0 \neq x_1$ , 则  $x_1 + 2x_0 = 3$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 满足圆  $x^2 + (y-4)^2 = 25$  与  $(x-a)^2 + y^2 = 1$  相交的一个  $a$  值为\_\_\_\_\_.

14. 已知三棱锥  $P-ABC$  的三条侧棱两两垂直, 且其外接球半径为 2, 则  $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 一个袋子中有 100 个大小相同的球, 其中有 40 个黄球, 60 个白球. 采取不放回摸球, 从中随机摸出 22 个球作为样本, 用  $X$  表示样本中黄球的个数. 当  $P(X=k)$  最大时,  $E(X) + k =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知点  $A(1, 2)$  在抛物线  $y^2 = 2px$  上, 过点  $A$  作圆  $(x-2)^2 + y^2 = 2$  的两条切线分别交抛物线于  $B, C$  两点, 则直线  $BC$  的方程为\_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，向量  $m = (a, \sqrt{3}b)$ ，  
 $n = (\cos(\frac{\pi}{2} - B), \cos(\pi - A))$ ，且  $m \perp n$ 。

(1) 求  $A$ ；

(2) 若  $c = 3$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求  $a$ 。

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 3$ ，且满足  $a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+2}$ 。

(1) 证明： $\{a_n - 2^n\}$  为等比数列；

(2) 已知  $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ \log_2 a_n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$   $T_n$  为  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和，求  $T_{10}$ 。

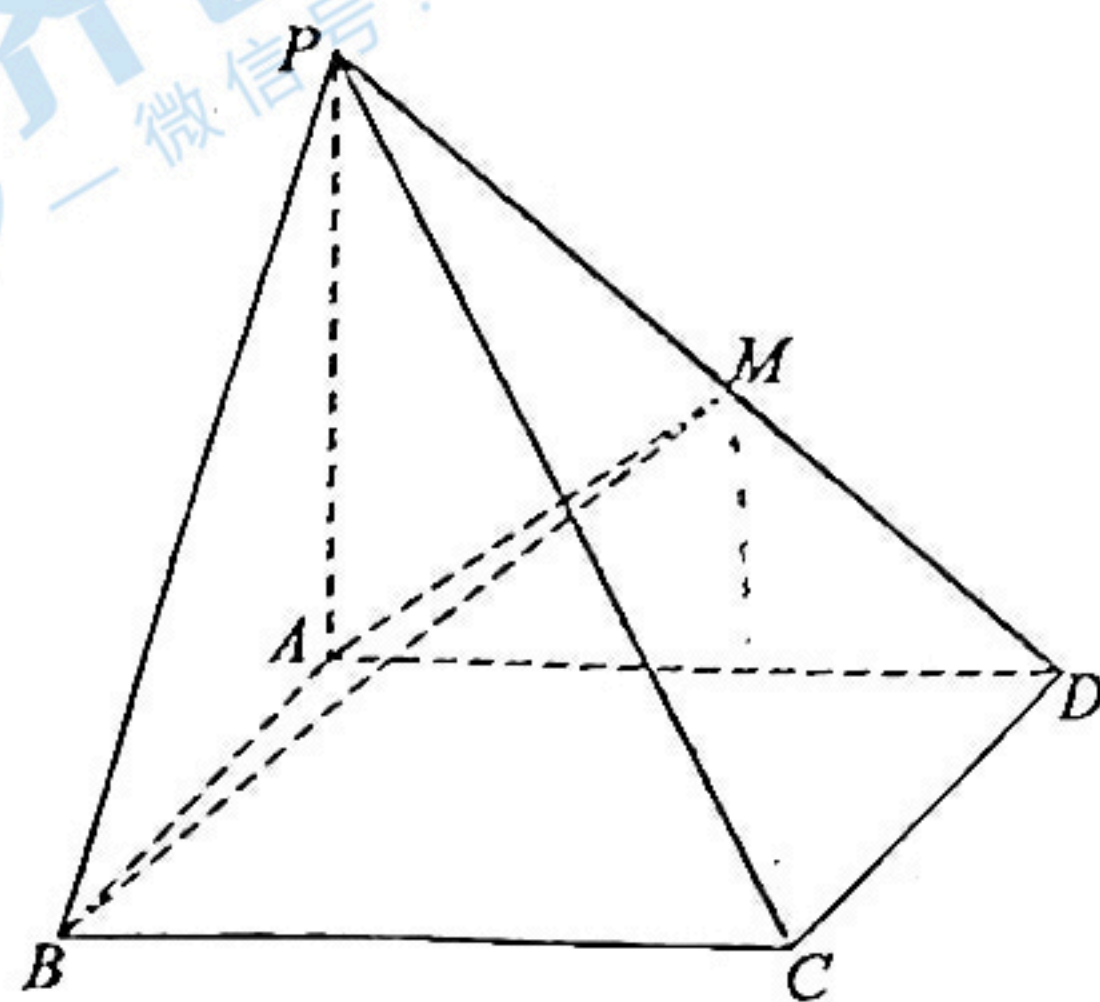
19. (12 分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AD = 8$ 。  $M$  为线段  $PD$  上一点 ( $M$  不与  $D$  重合)，且  $AM \perp MC$ 。

(1) 证明： $M$  为  $PD$  的中点；

(2) 若平面  $BAM$  与平面  $CAM$  夹角的余弦值为

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求  $AB$ 。





20. (12分)

某市正在创建全国文明城市,学校号召师生利用周末从事创城志愿活动.高三(1)班一组有男生4人,女生2人,现随机选取2人作为志愿者参加活动,志愿活动共有交通协管员、创建宣传员、文明监督员三项可供选择.每名女生至多从中选择参加2项活动,且选择参加1项或2项的可能性均为 $\frac{1}{2}$ ;每名男生至少从中选择参加2项活动,且选择参加2项或3项的可能性也均为 $\frac{1}{2}$ .每人每参加1项活动可获得综合评价10分,选择参加几项活动彼此互不影响,求

(1) 在有女生参加活动的条件下,恰有一名女生的概率;

(2) 记随机选取的两人得分之和为 $X$ ,求 $X$ 的期望.

21. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )的右焦点为 $F(2, 0)$ ,一条渐近线方程为

$$y = \sqrt{3}x.$$

(1) 求 $C$ 的方程;

(2) 在 $x$ 轴上是否存在与 $F$ 不重合的点 $P$ ,使得当过点 $F$ 的直线与 $C$ 的右支交于 $A$ ,

$B$ 两点时,  $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AP|}{|BP|}$ 总成立?若存在,求出点 $P$ 的坐标;若不存在,请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x \sin x - x$ .

(1) 当 $x \leq \frac{\pi}{2}$ 时,求证:  $f(x) \geq 0$ ;

(2) 当 $x > 0$ 时,函数 $f(x)$ 的零点从小到大依次排列,记为 $\{x_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$

证明: ①  $\sin x_n > \sin x_{n+1}$ ; ②  $x_{2n-1} + \pi < 2n\pi < x_{2n}$ .