2021 学年第二学期浙江省名校协作体联考参考答案

高三年级数学学科

命题：春晖中学、湖州中学　　审核：温岭中学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	D	C	A	A	C	D	B	B

10.【解析】设函数 $f(x)=e^x-\cos x(x>0)$，则 $f'(x)=e^x+\sin x\geq 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 用数学归纳法先证 $0<a_n\leq 1$：当 $n=1$ 时，有 $0<a_1\leq 1$；假设 $0<a_k\leq 1$，由于 $f(0)=0<a_k=f(a_{k+1})\leq 1<f(1)$，从而 $0<a_{k+1}\leq 1$. 由数学归纳法原理可知 $0<a_n\leq 1$.

对于选项 A，由于 $e^x>1+x(x>0)$，则 $a_n=e^{a_{n+1}}-\cos a_{n+1}>1+a_{n+1}-\cos a_{n+1}>a_{n+1}$，故 A 正确.

对于选项 B，由于当 $0<x\leq 1$ 时，可利用导数证明不等式：$f(x)=e^x-\cos x>x+x^2$，

故 $a_n=e^{a_{n+1}}-\cos a_{n+1}=f(a_{n+1})>a_{n+1}+a_{n+1}^2$，从而选项 B 错误.

对于选项 C，也可用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，有 $0<a_1\leq 1=\dfrac{1}{\sqrt{1}}$ 成立，假设 $a_k\leq\dfrac{1}{\sqrt{k}}(k\in N^*)$

若 $a_{k+1}>\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$，则 $a_k>a_{k+1}+a_{k+1}^2>\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1+\sqrt{k+1}}{k+1}>\dfrac{\sqrt{k+1}}{k}>\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，与假设 $a_k\leq\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 矛盾，故 $a_{k+1}\leq\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$. 故 $a_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n\in N^*)$. 从而选项 C 正确.

对于选项 D，当 $n\geq 1$ 时，$a_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，

故 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<2\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=2\sqrt{n}$

选项 D 也可如下证明：由于 $a_n^2<a_{n-1}-a_n$，从而 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2<a_1^2+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)=2-a_n$. 从而由柯西不等式得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leq\sqrt{1+1+\cdots+1}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}<\sqrt{n}\cdot\sqrt{2-a_n}<\sqrt{2n}\leq 2\sqrt{n}$.　　综合上述，选 B.

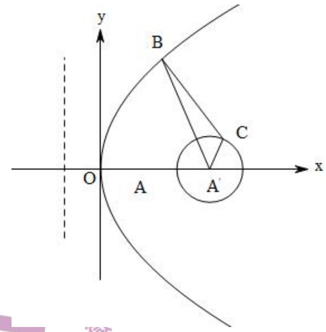
二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 1，$\{0,e\}$　　12. 14；$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$　　13. 8；25

14. 2，$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　15. $\dfrac{5}{9}$　　16. $(1,3]$　　17. $2\sqrt{2}-1$

17. **解析**：如图，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，由 $|\vec{a}-\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}+1$ 的几何意义可得 B 的轨迹为抛物线：$y^2=4x$．

$|3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{c}-(\vec{b}-3\vec{a})|$ 可看作抛物线上任意点 B 到以 $A'(3,0)$ 为圆心，半径为 1 的圆上任一点 C 的距离，设 $B(x,y)$，则



$|3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{c}-(\vec{b}-3\vec{a})|=|BC|\ge|BA'|-1=\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1$

$=\sqrt{(x-3)^2+4x}-1=\sqrt{(x-1)^2+8}-1\ge 2\sqrt{2}-1$，当 $x=1$ 时取等号．故 $|3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.（本小题满分 14 分）

解析：$\because\ a\tan B=b\tan A$

$\therefore\ \dfrac{a\sin B}{\cos B}=\dfrac{b\sin A}{\cos A}$ ……………………1 分

由正弦定理得 $a\sin B=b\sin A$

$\therefore\ \cos B=\cos A$ ……………………2 分

$\because\ A,B\in(0,\pi)$ ……………………3 分

$\therefore\ B=A$ ……………………4 分

（Ⅰ）$\because\ \cos A+\cos(\dfrac{2\pi}{3}-B)=\cos A-\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A=1$ ……………………5 分

$\therefore\ \sin(A+\dfrac{\pi}{6})=1$ ……………………6 分

$\because\ A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$ ……………………7 分

$\therefore\ A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………8 分

（Ⅱ）$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1-\cos A}{2}+\dfrac{1-\cos B}{2}+\dfrac{1-\cos C}{2}$ ………………9 分

$=\dfrac{1-\cos A}{2}+\dfrac{1-\cos A}{2}+\dfrac{1-\cos(\pi-2A)}{2}$ ………………10 分

$=1-\cos A+\dfrac{1+\cos 2A}{2}$ ……………………11 分

$=1-\cos A+\dfrac{1+2\cos^2 A-1}{2}=(\cos A-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$ ……………………12 分

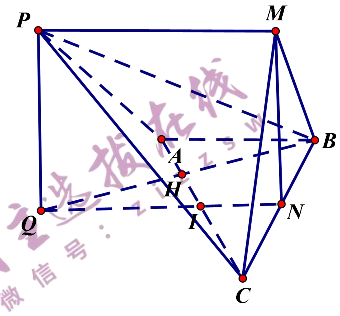
$\because\ \cos A\in(0,1)$ ……………………13 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$\therefore\ \sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}\in[\dfrac{3}{4},1)$ ……………………14 分

19. （本小题满分 15 分）

解析：



法一： （I）证明：过 M 在平面 MBC 内做作 BC 的垂线，垂足为 N，因为平面 $MBC\perp$ 平面 ABC，所以 $MN\perp$ 平面 ABC

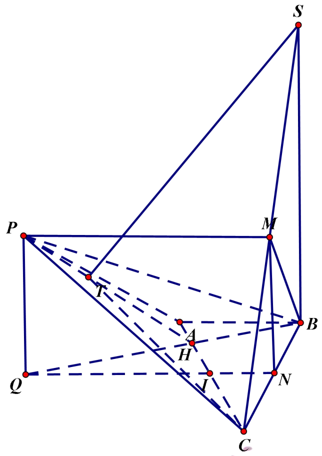
过 P 作 PQ 垂直平面 ABC，垂足为 Q，连接 QN，QB 交 AC 于 I、H

所以 $MN//PQ$，所以 M、N、P、Q 四点共面

又 $PM//AB$，所以 $PM//$ 平面 ABC，

平面 $PMQN\cap$ 平面 $ABC=QN$

所以 $PM//QN$，所以 $MNPQ$ 是矩形……………………………4 分



所以 $PM//QN//AB$，因为 $MB=MC$，所以 N 为中点，又因为 $2PM=3AB$，

所以 $IN=\dfrac{1}{2}AB$，所以 $QI=AB$，所以 $AH=HI$，所以 $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{1}{3}$，又 $AC=2AB$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $AC\perp BQ$，又 $PQ\perp$ 平面 ABC，所以 $AC\perp PB$ ……………………………7 分

（II）延长 CM 使得 $CM=MS$，所以 $SB\perp$ 平面 ABC，所以 SB 与平面 PQH 共面，平面 $PQH\perp$ 平面 APC，交线为 PH，所以过 S 在平面 $SPGH$ 内作 $ST\perp PH$，垂足为 T

所以 $ST\perp$ 平面 PAC ……………………………………9 分

所以 $\angle SCT$ 是 MC 与平面 PAC 所成角. ……………………………11 分

因为 $AC=2AB$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $AB=QI=2$，

所以 $HB=QH=\sqrt{3}$，又因为 $MC=\sqrt{6}$，所以 $MN=\sqrt{3}=PQ$，

因为 $\angle PHQ=45°$，可求得：$ST=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，$SC=2\sqrt{6}$， ……………14 分

$\therefore$ 直线 MC 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{ST}{SC}=\dfrac{\frac{3\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3}{4}$ ………15 分

法二： （I）

取 BC 中点 O，由平面 $MBC\perp$ 平面 ABC， $MB=MC$，可知 $OM\perp$ 平面ABC

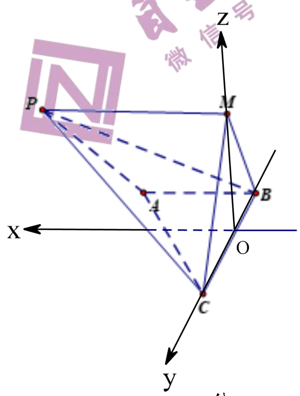
如图建系， ……………2 分

$A(2,-\sqrt{3},0)$ ， $B(0,-\sqrt{3},0)$ ， $C(0,\sqrt{3},0)$ ， 设 $M(0,0,h)$ ， 则 $P(3,0,h)$ ……………4 分

（I）得 $\overrightarrow{AC}=(-2,2\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{PB}=(-3,-\sqrt{3},-h)$

$\therefore \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{PB}=0$ 得 $AC\perp PB$ ……………7 分

（II） $MC=\sqrt{6}$ 推出 $h=\sqrt{3}$， ……………9 分



所以 $\overrightarrow{MC}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{AP}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{n}$，

$$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=(\sqrt{3},1,-2),$$ …………12 分

设直线 MC 与平面 PAC 所成角为 θ

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{MC},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MC}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}\bullet2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

所以直线 MC 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$． ………………15 分

20.（本小题满分 15 分）

解析：（Ⅰ）由 $na_n-(n+1)a_{n+1}=a_na_{n+1}$ 两边同除 $n(n+1)$ 得： $\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_na_{n+1}}{n(n+1)}$，

两边同除 a_na_{n+1} 得： $\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}-\frac{1}{na_n}=\frac{1}{n(n+1)}$，

则 $\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}-\frac{1}{na_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， ……………………2 分

所以 $\frac{1}{na_n}=\left(\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n-1)a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{(n-1)a_{n-1}}-\frac{1}{(n-2)a_{n-2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}$

$=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+1=2-\frac{1}{n}$，（ $n\geq2$ ）………4 分

所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$， 又 $a_1=1$ 符合 $a_n=\frac{1}{2n-1}$， 故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$， $n\in N^*$. ……5 分

由 $b_n=2b_{n+1}+3b_{n+2}$ 得： $1=2q+3q^2$， 解得： $q=\frac{1}{3}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. ……7 分

（Ⅱ）$\because \frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-1}{3^n}$，

$\therefore S_n = 1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ①

$\therefore \frac{1}{3}S_n = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ②

由①-②得：$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$，

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^{n-1}})-(2n-1)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}}$

$\therefore S_n=1-\frac{n+1}{3^n}$. ……………………………………11 分

则 $(-1)^n\left(\frac{1-S_n}{n+1}\right)=(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}$，由 $\left|(-1)^n\left(\frac{1-S_n}{n+1}\right)-\lambda\right|\le 2$ 得：

$\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}-\lambda\right|\le 2\Rightarrow(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}-2\le\lambda\le(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}+2$，

因为 $(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}=\begin{cases}\frac{1}{3^n},n\text{为偶数}\\-\frac{1}{3^n},n\text{为奇数}\end{cases}$，

所以当 n 为偶数时，$\frac{1}{3^n}\in(0,\frac{1}{9}]$； 当 n 为奇数时，$-\frac{1}{3^n}\in[-\frac{1}{3},0)$.

故 $(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}\in[-\frac{1}{3},0)\cup(0,\frac{1}{9}]$. ……………………………………13 分

所以 $\frac{1}{9}-2\le\lambda\le-\frac{1}{3}+2$，即 $-\frac{17}{9}\le\lambda\le\frac{5}{3}$，故 λ 的取值范围是 $\left[-\frac{17}{9},\frac{5}{3}\right]$. …15 分

21.（本小题满分 15 分）

解析：（I）由抛物线定义及 $|RF|=2$ 得 $1+\frac{p}{2}=2$，则 $p=2$

所以抛物线 C 的方程为 $C:y^2=4x$. ……………………………4 分

（II）（i）证明：设直线 $AP:y=k(x+4)$

则由 $\begin{cases}y=k(x+4)\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $k^2x^2+(8k^2-4)x+16k^2=0$

$\Delta=(8k^2-4)^2-64k^4=0\Rightarrow 64k^2=16\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$，$x_A^2=16\Rightarrow x_A=4$

$\therefore$不妨设 $AP:y=\frac{1}{2}(x+4)$，$BP:y=-\frac{1}{2}(x+4)$，$A(4,4)$，$B(4,-4)$，……6 分

设 $D(2t,t+2)$，$t\in(-2,2)$，设直线 $DH: x=m(y-t-2)+2t$，

则由 $\begin{cases} x=m(y-t-2)+2t \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $y^2-4my+4mt+8m-8t=0$

$\Delta=16m^2-16mt-32m+32t=0 \Rightarrow m^2-(t+2)m+2t=0 \Rightarrow m=t或m=2(舍去)$……8 分

$\therefore E(t^2,2t)$，$DH: x=ty-t^2$

由 $\begin{cases} x=ty-t^2 \\ y=-\dfrac{1}{2}(x+4) \end{cases}$ 得 $H(-2t,t-2)$

$\therefore |AD|+|BH|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}(|x_A-x_D|+|x_B-x_H|)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(4-2t+4+2t)=4\sqrt{5}$（定值）……10 分

（ii）由（i）得 $d_{E-AD}=\dfrac{|t^2-4t+4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(t-2)^2$，$|AD|=\dfrac{\sqrt{5}|4-2t|}{2}$

$d_{E-BH}=\dfrac{|t^2+4t+4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)^2$，$|BH|=\dfrac{\sqrt{5}|4+2t|}{2}$

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}|AD|\cdot d_{E-AD}=\dfrac{1}{2}(2-t)^3$，$S_2=\dfrac{1}{2}|BH|\cdot d_{E-BH}=\dfrac{1}{2}(2+t)^3$，………12 分

$\therefore S=3S_1+\dfrac{1}{3}S_2=\dfrac{3}{2}(2-t)^3+\dfrac{1}{6}(2+t)^3=f(t)$

$\therefore f'(t)=\dfrac{1}{2}(t+2)^2-\dfrac{9}{2}(2-t)^2=\dfrac{1}{2}(t+2+6-3t)(t+2-6+3t)=-4(t-1)(t-4)$

$\therefore f(t)$ 在 $(-2,1)$ 上递减，在 $(1,2)$ 递增

$\therefore S_{\min}=f(1)=6$. ……………………………………………………15 分

22.（本小题满分 15 分）

解答：

（Ⅰ）令 $f(2e-x)=x\ln(2e-x)=h(x)$，$x\in(-\infty,2e)$，

$h'(x)=\ln(2e-x)-\dfrac{x}{2e-x}=\ln(2e-x)+1-\dfrac{2e}{2e-x}$ ，……2 分

$h'(x)$ 在定义域上单调递减，所以 $x=e$ 为 $h(x)$ 的极大值点，…… 4 分

所以 $f(2e-x)$ 在 $(-\infty,e)$ 上单调递增，$(e,2e)$ 单调递减. ……5 分

（或者求出 $f(x)$ 的单调区间，再利用对称性得 $f(2e-x)$ 的单调区间）

（Ⅱ）（i）$g(x)=x\ln(2a-x)-(2a-x)\ln x$，$x\in(0,2a)$

因为 $g^{'}(x)=\ln[(2a-x)x]-(\dfrac{2a-x}{x}+\dfrac{x}{2a-x})$ ……7 分

$\le \ln a^2-2$ ，当 $x=a$ 时取等号. ……9 分

所以当 $0<a\le e$ 时，$g^{'}(x)\le 0$，$g(x)$ 单调递减，又 $g(a)=0$，符合要求.

当 $a>e$ 时，由 $g(x)$ 的对称性，只需考虑 $x\in(0,a)$

$g(e)=e\ln(2a-e)-(2a-e)$，由 $\ln x<\dfrac{1}{e}x$ 得 $g(e)<0$

又 $g(\dfrac{1}{e})=\dfrac{1}{e}\ln(2a-\dfrac{1}{e})+(2a-\dfrac{1}{e})>0$，所以 $g(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e},e)$ 上有零点，又 $g(a)=0$，

与 $g(x)$ 有且只有一个零点矛盾.

综上: $0<a\le e$. ……11 分

（ii）由 $g(x)$ 的对称性，$h(x)=\begin{cases}-g(x),x\in(0,a]\\ g(x),x\in(a,2a)\end{cases}$ 关于 $x=a$ 轴对称,

有 4 个根，由（i）中分析可知 $a>e$，

$a-x_2=x_3-a$，所以 $x_3-x_2=2(x_3-a)$，

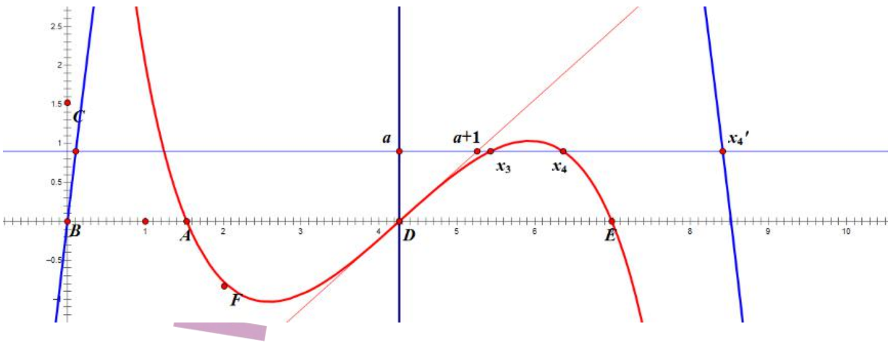
不妨考虑 $x\in(a,2a)$ 时，此时 $h(x)=g(x)$，考虑 $g(x)$ 在 a 处的切线，

记 $\varphi(x)=g(x)-(2\ln a-2)(x-a)$，由（i）得 $\varphi'(x)=g'(x)-(2\ln a-2)\le 0$，

所以 $\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即 $g(x)<(2\ln a-2)(x-a)$ 在 $x\in(a,2a)$ 上恒成立，

$0=g(x_3)+2-2\ln a<(2\ln a-2)(x_3-a)+2-2\ln a$，

推出 $x_3>a+1$，所以 $x_3-a>1$，所以 $x_3-x_2>2$ ……13 分



又 $x\in(a,2a)$ 时，$g(x)<x\ln(2a-x)<x(2a-x)$

$0=g(x_4)+2-2\ln a<(2a-x_4)x_4+2-2\ln a$

推出 $x_4 < a+\sqrt{a^2-2\ln a+2}$，并由对称性，$x_4-x_1=2(x_4-a)<2\sqrt{a^2-2\ln a+2}$. ……15 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线