参考答案及解析

一、选择题

1.B 【解析】由题意得 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$\complement_U A=\{0,1,2,5,7,9,10\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，所以 $(\complement_U A)\cap B=\{1,7,10\}$．故选B项．

2.D 【解析】由命题的否定的概念，可知D项正确．故选D项．

3.A 【解析】由 $xy>1$，得 $x^2+y^2\geqslant 2xy>2>1$；但当 $x^2+y^2>1$ 时，取 $x=1,y=\frac{1}{100}$，则 $xy=\frac{1}{100}<1$．所以"$xy>1$"是"$x^2+y^2>1$"的充分不必要条件．故选A项．

4.C 【解析】由题意得 $q\approx 4\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，初末质量比最大为10，则该型号单级火箭能获得的最大理想速度 $v=4\,000\ln 10=4\,000(\ln 2+\ln 5)\approx 4\,000\times(0.69+1.61)=9\,200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$．故选C项．

5.B 【解析】因为 $a_1=3$，$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$S_{m+n}=S_mS_n$，所以 $S_{n+1}=S_nS_1=S_na_1=3S_n$，又 $S_1\neq 0$，所以 $\{S_n\}$ 是首项为3，公比为3的等比数列，所以 $S_n=3^n$，所以 $a_4=S_4-S_3=3^4-3^3=54$，B项正确，D项错误；同理，$a_2=6$，$a_3=18$，$a_2^2\neq a_1\cdot a_3$，A项错误；$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=S_9-S_4>3^8$，C项错误．故选B项．

6.C 【解析】由 $2^a=3^b=t$，知 $t>0$，且 $a=\log_2 t$，$b=\log_3 t$，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{\log_2 t}+\frac{2}{\log_3 t}=\log_t 2+2\log_t 3=\log_t 18=2$，所以 $t^2=18$，$t=3\sqrt{2}$．故选C项．

7.D 【解析】由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\frac{x^{\frac{3}{5}}a^x+x^{\frac{3}{5}}-4}{a^x+1}=x^{\frac{3}{5}}-\frac{4}{a^x+1}$，又 $a>1$，所以 $f(x)$ 为增函数，又 $f(x)+f(-x)=x^{\frac{3}{5}}-\frac{4}{a^x+1}+(-x)^{\frac{3}{5}}-\frac{4}{a^{-x}+1}=-\left(\frac{4}{a^x+1}+\frac{4a^x}{a^x+1}\right)=-4$，所以 $f(x)+4=-f(-x)$，即 $f(2x-1)+f(x-1)+4=f(2x-1)-f(1-x)>0$，即 $f(2x-1)>f(1-x)$，所以 $2x-1>1-x$，所以 $x>\frac{2}{3}$．故选D项．

8.B 【解析】由题意 $a=\mathrm{e}^{0.03}$，$b=\ln(1.03\mathrm{e})=\ln(1+0.03)+1$，$c=\sqrt{1.06}=\sqrt{1+2\times 0.03}$，下面先证明 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，设函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-1$，当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>x+1$，再设 $f(x)=x+1-\sqrt{1+2x}$，$x>0$，令 $t=\sqrt{1+2x}>1$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，所以 $f(x)=h(t)=\frac{t^2-1}{2}+1-t=\frac{(t-1)^2}{2}>0(t>1)$，所以 $x+1>\sqrt{1+2x}$ ①，所以 $\mathrm{e}^{0.03}>0.03+1>\sqrt{1+2\times0.03}=\sqrt{1.06}$，即 $a>c$．再设 $g(x)=\ln(1+x)+1-\sqrt{1+2x}(x>0)$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{(x+1)\sqrt{1+2x}}$，又由①知 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，所以 $\ln(1+x)+1<\sqrt{1+2x}$，所以 $\ln(1+0.03)+1<\sqrt{1+2\times0.03}$，即 $\ln(1.03\mathrm{e})<\sqrt{1.06}$，所以 $b<c$．综上，$a>c>b$．故选B项．

二、选择题

9.ABD 【解析】对于A项，$\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}=\frac{ab+b-(ab+a)}{a(a+1)}=\frac{b-a}{a(a+1)}<0$，所以 $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$，A项正确；对于B项，因为 $a-b-1>-1$，所以 $3^{a-b-1}>3^{-1}=\frac{1}{3}$，B项正确；对于C项，令 $a=2,b=\frac{1}{2}$，则 $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$，C项错误；对于D项，由均值定理即可得到，D项正确．故选ABD项．

10.BC 【解析】对于A项，令 $f(x)=1$，则 $f(x)$ 满足题给条件，但 $f(0)\neq0$，A项错误；对于B项，当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=1$，所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$，所以 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$，B项正确；对于C项，由题意得 $f(x)$ 定义域关于原点中心对称，则 $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，C项正确；对于D项，令 $f(x)=x$，则 $f(x)$ 满足题给条件，但当 $x<0$ 时，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant2$ 不成立，D项错误．故选BC项．

11.BD 【解析】当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\ln x+2$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{-2}$，所以 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{1}{2}\right]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．当 $x\to0$ 时，$f(x)\to2$，$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=2-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$．当 $x\in$

$\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f(x)=\frac{1}{x}$；当 $x\in[k,k+1)$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)=\frac{k+1}{x}$，从而数形结合可知 B，D 项正确. 故选 BD 项.

12. ACD 【解析】因为 $a_1=3>2$，由 $a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4=\left(a_n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$，所以当 $a_n>2$ 时，由二次函数单调性知 $a_{n+1}>\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=2$，所以 $a_n>2$，$a_{n+1}-a_n=a_n^2-4a_n+4=(a_n-2)^2>0$，所以 $a_{n+1}>a_n$，A 项正确；$a_{n+1}-\frac{3}{2}=a_n^2-3a_n+4-\frac{3}{2}=a_n^2-3a_n+\frac{5}{2}=\left(a_n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>\left(a_n-\frac{3}{2}\right)^2$，因为$a_n>2$，所以 $\ln\left(a_{n+1}-\frac{3}{2}\right)>2\ln\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$，$\ln\left(a_n-\frac{3}{2}\right)>2\ln\left(a_{n-1}-\frac{3}{2}\right)>2^2\ln\left(a_{n-2}-\frac{3}{2}\right)>\cdots>2^{n-1}\ln\left(a_1-\frac{3}{2}\right)=2^{n-1}\ln\frac{3}{2}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{n-1}}$，所以 $a_n-\frac{3}{2}>\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{n-1}}$，所以 $a_{2\,023}>\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{2\,022}}$，显然 $2^{2\,022}>2^{11}=2\,048>2\,023$，所以 $a_{2\,023}>\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2\,023}$. 又 $2\,023^{\frac{3}{2\,023}}<2\,023^{\frac{1}{11}}<2<\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，所以$2\,023^{\frac{1}{2\,023}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，所以 $2\,023^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{2\,023}$，B 项错误，D 项正确；$a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4=(a_n-1)(a_n-2)+2$，$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{(a_n-1)(a_n-2)}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_n-1}$，$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}$，所以 $S_n=\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_2-2}+\frac{1}{a_2-2}-\frac{1}{a_3-2}+\cdots+\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}<1$，C 项正确. 故选 ACD 项.

三、填空题

13. π 【解析】由题意得 $27^2=-9a$，所以 $a=-81$，从而公比为 $-\frac{1}{3}$，所以 $b=3$，所以原式 $=\sqrt{(3-\pi)^2}-[3\times(-81)]^{\frac{1}{5}}=\pi-3-(-3^5)^{\frac{1}{5}}=\pi$.

14. $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$ 【解析】设 $t=x^4-1$，则 $t\geqslant-1$ 且 $t\neq0$，从而 $\frac{1}{t}\in(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$，所以 $2^{\frac{1}{t}}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

15. $\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$ 【解析】$\frac{2x+5y+2z}{x+2y}+\frac{2x}{y+2z}=\frac{2(x+2y)+y+2z}{x+2y}+\frac{2x}{y+2z}=2+\frac{y+2z}{x+2y}+\frac{2x}{y+2z}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{y+2z}{x+2y}\cdot\frac{2x}{y+2z}}=2+2\sqrt{\frac{2x}{x+2y}}=2+2\sqrt{\frac{2}{1+2\frac{y}{x}}}$，因为 $\frac{y}{x}\leqslant1$，所以当 $\frac{y}{x}=1$ 时，$2+2\sqrt{\frac{2}{1+2\frac{y}{x}}}=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$，上述等号在 $\begin{cases}(y+2z)^2=2x(x+2y),\\x=y\end{cases}$ 时成立.

16. 11 【解析】由题意得 $a>\frac{1}{2}$，$\log_9(2a-1)=5-2a$，所以 $\log_3(2a-1)=10-4a$，设 $t=\log_3(2a-1)$，则 $2a=3^t+1$，原式化为 $t=10-2(3^t+1)$，即 $2\cdot3^t+t=8$，又由题意 $2\cdot3^{b-1}+b=9$ 得 $2\cdot3^{b-1}+b-1=8$，设$f(x)=2\cdot3^x+x$，显然 $f(x)$为增函数，从而 $t=b-1$，所以 $2a=3^t+1=3^{b-1}+1=\frac{9-b}{2}+1$，从而 $b+4a=11$.

四、解答题

17. 解：因为$\frac{6-2x}{x+2}>0$，所以$(x+2)(x-3)<0$，

解得 $x\in(-2,3)$. （2 分）

由 $x^2+2kx-3k^2\leqslant0$，得$(x+3k)(x-k)\leqslant0$，

当 $k>0$ 时，$x\in[-3k,k]$； （4 分）

当 $k=0$ 时，$x=0$； （5 分）

当 $k<0$ 时，$x\in[k,-3k]$. （6 分）

因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，

所以当 $k>0$ 时，$\begin{cases}-3k\leqslant-2,\\k\geqslant3,\end{cases}$ 解得 $k\geqslant3$； （7 分）

当 $k=0$ 时，不符合题意； （8 分）

当 $k<0$ 时，$\begin{cases}k\leqslant-2,\\-3k\geqslant3,\end{cases}$ 解得 $k\leqslant-2$. （9 分）

综上，实数 k 的取值范围为$(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$. （10 分）

18. 解：(1)由 $S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6=33$，

可得 $a_6=11$. （1 分）

又 $a_1=1$，所以公差 $d=\frac{a_6-a_1}{6-1}=\frac{11-1}{5}=2$， （3 分）

所以 $a_n=2n-1$. （5 分）

(2)$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<2$. 证明如下：

由(1)可求得 $S_n=n^2$， （7 分）

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{S_1}=1<2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，（11分）

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}$

$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=2-\frac{1}{n}<2$.（12分）

19. **解**：(1)由题意 $\exists x>0$，$f(x)<0$，得 $x^3-x^2-ax+1<0$，即 $a>\frac{x^3-x^2+1}{x}$ 在 $x>0$ 时有解.（1分）

设 $\varphi(x)=\frac{x^3-x^2+1}{x}$，

则 $\varphi'(x)=2x-\frac{1}{x^2}-1$，易知 $\varphi'(1)=0$.（2分）

令 $m(x)=2x-\frac{1}{x^2}-1$，则 $m'(x)=2+\frac{2}{x^3}>0$，

所以 $\varphi'(x)$ 单调递增，（3分）

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增.（4分）

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=1$，所以 $a>1$.（6分）

(2)由题意得 $g(x)=x^3-x^2$，所以 $g'(x)=3x^2-2x$，

令 $g'(x)=1$，解得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{3}$，（7分）

所以直线与 $y=g(x)$ 的两个切点坐标分别为 $(1,0)$，$\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27}\right)$，（8分）

所以切线方程分别为 $y=x-1$ 和 $y=x+\frac{5}{27}$.（9分）

令 $x-1=x^2+bx$，得 $x^2+(b-1)x+1=0$，

令 $\Delta_1=(b-1)^2-4=0$，解得 $b=3$ 或 $b=-1$.（10分）

令 $x+\frac{5}{27}=x^2+bx$，得 $x^2+(b-1)x-\frac{5}{27}=0$，

令 $\Delta_2=(b-1)^2+\frac{20}{27}=0$，无解.（11分）

经检验，直线与 $y=h(x)$ 的两个切点坐标分别为 $(-1,-2)$，$(1,0)$，

综上，$b=3$ 或 $b=-1$.（12分）

20. **解**：(1)由条件①知，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.（1分）

再结合条件②，可知存在唯一的 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=13$，从而有 $f(x)-9^x-3^x=x_0$.

又上式对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 成立，所以 $f(x_0)-9^{x_0}-3^{x_0}=x_0$，

所以 $13-9^{x_0}-3^{x_0}=x_0$，即 $9^{x_0}+3^{x_0}+x_0=13$.（3分）

设 $\varphi(x)=9^x+3^x+x$，因为 $\varphi'(x)=9^x\ln 9+3^x\ln 3+1>0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递增.（4分）

又 $\varphi(1)=13$，所以 $x_0=1$.（5分）

所以 $f(x)=9^x+3^x+1$.（6分）

(2)构造函数 $g(x)=\frac{f(x)+(k-1)3^x}{f(x)}=1+\frac{(k-1)3^x}{9^x+3^x+1}$，

由题意“对任意的 $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$，均存在以 $\frac{f(x_1)+(k-1)3^{x_1}}{f(x_1)}$，$\frac{f(x_2)+(k-1)3^{x_2}}{f(x_2)}$，$\frac{f(x_3)+(k-1)3^{x_3}}{f(x_3)}$ 为三边长的三角形”等价于“$g(x_1)+g(x_2)>g(x_3)$ 对任意 $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$ 恒成立”.（7分）

又 $g(x)=1+\frac{k-1}{3^x+\frac{1}{3^x}+1}$，令 $t=3^x+\frac{1}{3^x}+1\geqslant 3$，当且仅当 $9^x=1$，即 $x=0$ 时取等号，则 $g(x)=1+\frac{k-1}{t}(t\geqslant 3)$，（8分）

当 $k>1$ 时，$g(x)\in\left(1,\frac{k+2}{3}\right]$，因为 $2<g(x_1)+g(x_2)\leqslant\frac{2k+4}{3}$ 且 $1<g(x_3)\leqslant\frac{k+2}{3}$，所以 $\frac{k+2}{3}\leqslant 2$，

即 $1<k\leqslant 4$；（9分）

当 $k=1$ 时，$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=1$，满足条件；（10分）

当 $k<1$ 时，$g(x)\in\left[\frac{k+2}{3},1\right)$，因为 $\frac{2k+4}{3}\leqslant g(x_1)+g(x_2)<2$ 且 $\frac{k+2}{3}\leqslant g(x_3)<1$，所以 $1\leqslant\frac{2k+4}{3}$，

即 $-\frac{1}{2}\leqslant k<1$.（11分）

综上，实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},4\right]$.（12分）

21. (1)**证明**：由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

令 $x=y=0$，则 $f(0)+f(0)=f(0)$，故 $f(0)=0$.（1分）

再令 $y=-x$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，（2分）

所以 $f(-x)=-f(x)$.（3分）

故 $f(x)$ 为奇函数.（4分）

(2)**解**：由题意得 $f(a_{n+1})=f\left(\frac{2a_n}{1+a_n^2}\right)=f(a_n)+f(a_n)=2f(a_n)$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\right]=f\left(\frac{4}{5}\right)=-f\left(-\frac{4}{5}\right)=-2$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，即 $f(a_1)=-1\neq 0$，（5分）

所以 $\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}=2$，

故$\{f(a_n)\}$是首项为-1,公比为2的等比数列,

所以 $f(a_n)=-2^{n-1}$. (6分)

所以 $b_n=-\left(\frac{2}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n-1}}\right)$,

所以$\frac{1}{2}b_n=-\left(\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}\right)$, (7分)

两式相减得$\frac{1}{2}b_n=-\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}\right)=-\left[2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n+1}{2^n}\right]=-3+\frac{n+3}{2^n}$,

所以 $b_n=-6+\frac{n+3}{2^{n-1}}$. (8分)

所以$(-1)^n(b_n+6)\cdot\lambda=(-1)^n\frac{n+3}{2^{n-1}}\cdot\lambda<4(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立,即$(-1)^n\lambda<\frac{2^{n+1}}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立.

设 $c_n=\frac{2^{n+1}}{n+3}$,则 $c_{n+1}-c_n=\frac{2^{n+2}}{n+4}-\frac{2^{n+1}}{n+3}=\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+4)(n+3)}>0$,所以数列$\left\{\frac{2^{n+1}}{n+3}\right\}$递增. (9分)

当n为奇数时,$\lambda>-\frac{2^{n+1}}{n+3}=-c_n$,当$n=1$时,$-c_n$有最大值$-1$,故$\lambda>-1$; (10分)

当n为偶数时,$\lambda<\frac{2^{n+1}}{n+3}=c_n$,当$n=2$时,$c_n$有最小值$\frac{8}{5}$,故$\lambda<\frac{8}{5}$. (11分)

综上,λ的取值范围是$\left(-1,\frac{8}{5}\right)$. (12分)

22.(1)**解**:因为$a>0$,所以当$x\geqslant1$时,$f(x)=ax\ln x$,$f'(x)=a\ln x+a>0$,

所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,无极大值; (1分)

当$x\in(0,1)$时,$f(x)=-ax\ln x$,$f'(x)=-(a\ln x+a)$,

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

所以$x=\frac{1}{e}$为极大值点, (2分)

所以$f\left(\frac{1}{e}\right)=-a\cdot\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}=1$,解得$a=e$. (3分)

因为$f(x)$,$g(x)$的图像共有三个不同的交点,

所以方程$ex|\ln x|=b|\ln x+1|$有三个不等正实根.

设$t=\ln x+1$,则$x=e^{t-1}$,且当$x>0$时,t与x一一对应,所以问题转化为关于t的方程$e^t|t-1|=b|t|$有三个不等实根.

又0不满足方程$e^t|t-1|=b|t|$,

所以方程$b=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t$有三个实根.

设$h(t)=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t$,则函数$h(t)=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t$与函数$y=b$的图像有三个交点, (4分)

当$t\geqslant1$或$t<0$时,$h(t)=\frac{t-1}{t}e^t$,$h'(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2}e^t>0$,所以$h(t)$在$(-\infty,0)$,$[1,+\infty)$上单调递增;

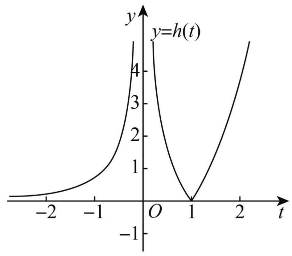
当$0<t<1$时,$h(t)=-\frac{(t-1)e^t}{t}$,$h'(t)=-\frac{t^2-t+1}{t^2}e^t<0$,所以$h(t)$在$(0,1)$上单调递减.

当$t\neq0,t\neq1$时,$h(t)>0$,而$h(1)=0$;

当$t\to-\infty$时,$h(t)=\left(1-\frac{1}{t}\right)e^t\to0$,无论$t>0$还是$t<0$,当$t\to0$时,都有$h(t)=\left|1-\frac{1}{t}\right|e^t\to+\infty$,

当$t\to+\infty$时,$h(t)=\left(1-\frac{1}{t}\right)e^t\to+\infty$. (5分)

根据以上信息,画出函数$h(t)$的大致图像如下图所示,



所以当$b>0$时,函数$h(t)=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t$与函数$y=b$的图像有三个交点,

故b的取值范围为$(0,+\infty)$. (6分)

(2)**证明**:要证原式,只需证$2\ln x_3-\ln x_2+\ln x_1<2b-2$,

只需证$2(\ln x_3+1)-(\ln x_2+1)+(\ln x_1+1)<2b$.

设(1)中方程$b=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t$的三个根分别为$t_1,t_2,t_3$,且$t_1<t_2<t_3$,$t_i=\ln x_i+1$,$i=1,2,3$,

从而只需证明$2t_3-t_2+t_1<2b$. (7分)

又由(1)的讨论知$t_1<0$,$0<t_2<1$,$t_3>1$.

下面先证明$e^x\geqslant x+1$,设$\varphi(x)=e^x-x-1$,

则$\varphi'(x)=e^x-1$.

当$x>0$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

当$x<0$时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,

所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$,所以当$x\neq0$时,$e^x>x+1$, (8分)

从而当$t\neq0,t\neq1$时,$h(t)=\left|\frac{t-1}{t}\right|e^t>\left|\frac{t-1}{t}\right|(t+1)$.

又由(1)知 $h(t)$ 在 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，$h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

所以当 $t>1$ 时，$h(t)>\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}$，令 $b=t-\frac{1}{t}$，解得 $t=\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$，由 $h(t_3)=b<h\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)$ 得 $t_3<\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$；（9 分）

当 $0<t<1$ 时，$h(t)>\frac{1}{t}-t$，令 $b=\frac{1}{t}-t$，解得 $t=\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}$，由 $h(t_2)=b<h\left(\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)$ 得 $t_2>\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}$；（10 分）

当 $t<0$ 时，$h(t)>t-\frac{1}{t}$，令 $b=t-\frac{1}{t}$，解得 $t=\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}$，由 $h(t_1)=b<h\left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)$ 得 $t_1<\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}$.（11 分）

综上，$2t_3-t_2+t_1<b+\sqrt{b^2+4}-\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}+\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}=2b$，得证.（12 分）