天一大联考

2022—2023 学年(上)高二年级期中考试

数学(B 卷)答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. **答案** A

命题意图 本题考查双曲线的基本性质.

解析 双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{4+9}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2. **答案** C

命题意图 本题考查向量的数量积.

解析 $\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+4=6$,$\therefore x=2$,$\therefore \boldsymbol{b}=(2,2,2)$,$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{6}{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

3. **答案** B

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 因为$\{a_n\}$是等差数列,所以$a_3+a_5=2a_4=18$,所以$a_4=9$,所以公差为$\frac{a_6-a_4}{2}=2$.

4. **答案** D

命题意图 本题考查椭圆的标准方程.

解析 方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$即$\frac{y^2}{1-2m}+\frac{x^2}{5+2m}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆,则$1-2m>5+2m>0$,解得$-\frac{5}{2}<m<-1$.

5. **答案** B

命题意图 本题考查直线与直线的位置关系.

解析 由条件知,l为线段OP的中垂线,因为OP的斜率为$\frac{4}{-2}=-2$,线段OP的中点坐标为$(-1,2)$,所以l的方程为$y-2=\frac{1}{2}(x+1)$,整理得$y=\frac{1}{2}(x+5)$,所以l在x轴上的截距为-5.

6. **答案** C

命题意图 本题考查等差数列及其前n项和的应用.

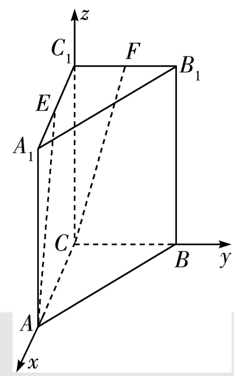
解析 设每节车厢里的乘客人数从前到后构成等差数列$\{a_n\}$,公差$d=-10$,则$a_4=a_1-30$,$a_5=a_1-40$,$a_8=a_1-70$,根据题意$\frac{(a_1+a_4)\times4}{2}=2\times\frac{(a_5+a_8)\times4}{2}$,即$2a_1-30=(2a_1-110)\times2$,解得$a_1=95$,所以这辆列车上的乘客总数为$\frac{(a_1+a_8)\times8}{2}=\frac{(95+25)\times8}{2}=480$.

7. **答案** B

命题意图 本题考查利用空间向量计算异面直线所成的角.

解析 以点C为坐标原点,CA,CB,CC_1所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系. 由题意可知

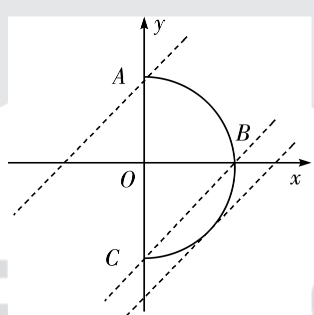
$A(1,0,0)$，$C(0,0,0)$，$E\left(\frac{1}{2},0,2\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},2\right)$，所以$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},0,2\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(0,\frac{1}{2},2\right)$，则$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{16}{17}$. 因此，异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值为$\frac{16}{17}$.



8. **答案**　A

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

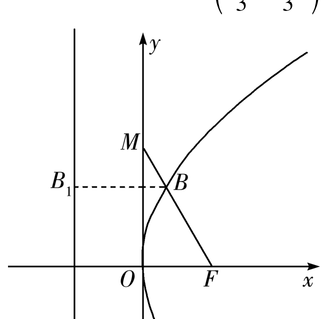
解析　曲线 C：$x=\sqrt{2-y^2}$，即 $x^2+y^2=2(x\geqslant 0)$，表示半个圆. 如图，设 $A(0,\sqrt{2})$，$B(\sqrt{2},0)$，$C(0,-\sqrt{2})$，当 l 经过点 A 时，$\sqrt{2}=0+b$，求得 $b=\sqrt{2}$，当 l 经过点 C 时，$-\sqrt{2}=0+b$，求得 $b=-\sqrt{2}$. 当 l 与 y 轴的交点在 A，C 之间（包含 A 点，不包含 C 点），即 $-\sqrt{2}<b\leqslant\sqrt{2}$时，$l$ 与 C 仅有一个交点. 当 l 和 C 相切时，由圆心到直线 l 的距离等于半径，可得$\sqrt{2}=\frac{|b|}{\sqrt{2}}$，求得 $b=-2$ 或 $b=2$（舍去），即 $b=-2$ 时，只有一个公共点，符合题意. 综上得，实数 b 的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup\{-2\}$.



9. **答案**　D

命题意图　本题考查抛物线的性质及直线与抛物线的位置关系.

解析　如图所示，作 BB_1 垂直于准线于 B_1，由已知得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，由$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{BM}$，得 B 的横坐标为$\frac{p}{6}$，则$|BB_1|=\frac{p}{6}+\frac{p}{2}=\frac{4}{3}$，解得 $p=2$，所以抛物线方程为 $y^2=4x$，所以 $B\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，再根据$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{BM}$得 M 的纵坐标为$\sqrt{3}$.



10. **答案** C

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 圆 C 的方程化为 $(x+4)^2+(y+3)^2=9$,圆心为 $C(-4,-3)$,半径为 3. 由已知得 $|OA|=r$, $|CA|=3$, $|OC|=5$,因为 $S_{四边形OACB}=2S_{\triangle OAC}$,所以 $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot r\sin\angle OAC=\frac{3r}{2}$,所以 $\sin\angle OAC=1$,即 $OA\perp CA$,所以 $r^2+3^2=5^2$,所以 $r=4$,圆 O 的方程为 $x^2+y^2=16$. 两个圆的方程作差,得 $4x+3y+16=0$,此方程即直线 AB 的方程. 原点 O 到直线 $4x+3y+16=0$ 的距离为 $\frac{16}{5}$,所以 $|AB|=2\sqrt{16-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$.

11. **答案** D

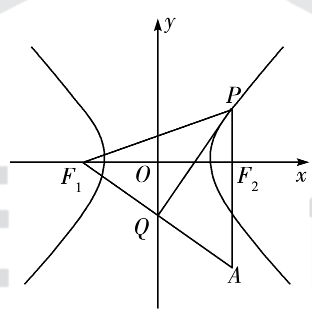
命题意图 本题考查等差数列的通项公式和前 n 项和.

解析 由 $a_4^2-a_6^2=4$ 得 $(a_1+3d)^2-(a_1+5d)^2=4$,即 $4d^2+a_1d+1=0$,将该式看作关于 d 的二次方程,则 $\Delta=a_1^2-16\geqslant 0$,因为 $a_1<0$,所以 $a_1\leqslant -4$,则 a_1 的最大值为 -4,此时由 $4d^2-4d+1=0$ 解得 $d=\frac{1}{2}$,所以 $S_{12}=12a_1+\frac{12\times 11}{2}d=-48+33=-15$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 如图所示,连接 F_1Q 并延长,交直线 PF_2 于点 A. 由已知可得直线 PA 与 y 轴平行,O 为 F_1F_2 的中点,所以 Q 为线段 F_1A 的中点,且 $|OQ|=\frac{1}{2}|AF_2|$. 又因为 PQ 是 $\angle F_1PA$ 的平分线,由三角形的“三线共点”性质可得 $PQ\perp AF_1$,所以 $|PF_1|=|PA|$. 根据双曲线的定义,有 $2a=|PF_1|-|PF_2|=|PA|-|PF_2|=|AF_2|$,所以 $|OQ|=\frac{1}{2}|AF_2|=a=2$.



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

命题意图 本题考查直线与直线平行的性质.

解析 $\because$ 直线 l_1 与 l_2 平行,$\therefore \frac{3}{18}=\frac{-a}{-9}\neq\frac{-4}{2a}$,解得 $a=\frac{3}{2}$,$\therefore$ 直线 l_1:$6x-3y-8=0$,直线 l_2:$6x-3y+1=0$,$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\frac{|-8-1|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

14. **答案** $\frac{3n-1}{2^n+1}$(答案不唯一)

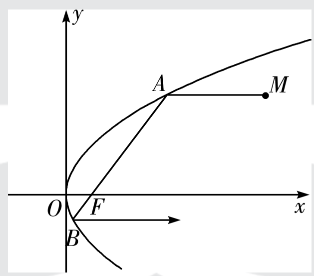
命题意图 本题考查数列的通项.

解析　分子 2,5,8,11 的通项为 $3n-1$,分母 3,5,9,17 的通项为 2^n+1,所以 $a_n=\frac{3n-1}{2^n+1}$.

15. **答案**　4

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　如图所示,由 $y^2=2x$,得焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,将 $y=2$ 代入 $y^2=2x$,得 $x=2$,可得 $A(2,2)$,直线 AB 经过 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,所以 $k_{AB}=k_{AF}=\frac{0-2}{\frac{1}{2}-2}=\frac{4}{3}$,故直线 AB 的方程为 $y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,与 $y^2=2x$ 联立,得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{8}$,得 B 点横坐标为 $\frac{1}{8}$,故 $\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=4$.



16. **答案**　$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

命题意图　本题考查椭圆的方程与性质.

解析　设 C 的半焦距为 $c(c>0)$,由题可知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $a^2=2c^2=2b^2$. 设 $|PF_1|=m$, $|PF_2|=n$,由已知得 $\begin{cases}m^2+n^2-2mn\cos 60°=(2c)^2,\\ m+n=2a,\\ \frac{1}{2}mn\sin 60°=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=6,\\ b^2=3,\end{cases}$ 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查直线的方程,直线与圆的位置关系.

解析　(Ⅰ)由已知得 l 的斜率为 $k=-\frac{3}{4}$,所以 m 的斜率为 $k'=-\frac{3}{4}$, ……………………………… (2 分)

又 m 过点 $N(0,-1)$,由点斜式方程可知 m 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x-1$,即 $3x+4y+4=0$. ……………… (5 分)

(Ⅱ)因为 m 与圆 C 相交,圆心 $C(1,0)$到 m 的距离为 $d=\frac{|3+4|}{5}=\frac{7}{5}$, ……………………………… (7 分)

圆 C 的半径为 $r=\sqrt{3}$,

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3-\frac{49}{25}}=\frac{2\sqrt{26}}{5}$. ………………………………………………………… (10 分)

18. **命题意图**　本题考查数列的前 n 项和及等差数列的性质.

解析　(Ⅰ)由条件得 $a_1=S_1=-9$, ………………………………………………………………………… (1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-10n-[(n-1)^2-10(n-1)]=2n-11$, ………………………………… (3 分)

$a_1=-9=2-11$ 也满足该式,

所以 $a_n=2n-11$. …………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n<0$，

所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|=-a_1-a_2-\cdots-a_5=\dfrac{(9+1)\times 5}{2}=25$； ………………………………（8 分）

当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n>0$，

所以 $|a_6|+|a_7|+\cdots+|a_{20}|=a_6+a_7+\cdots+a_{20}=\dfrac{(1+29)\times 15}{2}=225$. ……………………………（10 分）

所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|=25+225=250$. ……………………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查等差数列的性质.

解析 （Ⅰ）根据等差数列的性质，$S_3=3a_2$，

又 $S_3=a_1a_2$，$a_2\neq 0$，所以 $a_1=3$. ………………………………………………………………（2 分）

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由 $a_{14}=S_5$ 可得 $3+13d=5\times 3+\dfrac{5\times 4}{2}d$，

解得 $d=4$. ……………………………………………………………………………………………………（4 分）

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-1$. …………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $S_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2+n$，……………………………………………………（7 分）

则 $b_n=\dfrac{2n^2+n}{n+k}$.

所以 $b_1=\dfrac{3}{1+k}$，$b_2=\dfrac{10}{2+k}$，$b_3=\dfrac{21}{3+k}$. ……………………………………………………………（9 分）

因为 $\{b_n\}$ 是等差数列，所以 $2b_2=b_1+b_3$，

即 $\dfrac{20}{2+k}=\dfrac{3}{1+k}+\dfrac{21}{3+k}$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=0$（舍去）. ……………………………………………（11 分）

经验证，当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，$b_n=2n$ 符合条件，故 $k=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 （Ⅰ）因为平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PCD\perp$ 底面 $ABCD$，易得 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，又底面 $ABCD$ 为矩形，所以棱 DA，DC，DP 两两互相垂直. 以点 D 为坐标原点，以 DA，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系， ………………………………………………………………………………………………（1 分）

则 $B(2\sqrt{2},2,0)$，$P(0,0,4)$，$A(2\sqrt{2},0,0)$，$M(\sqrt{2},2,0)$. …………………………………………（2 分）

可得 $\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},2,-4)$，$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$. ……………………………………………………（3 分）

因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+4-0=0$，所以 $PB\perp AM$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2\sqrt{2},0,4)$. ……………………………………（6 分）

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

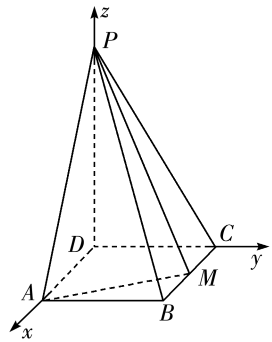
则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+2y=0,\\ -2\sqrt{2}x+4z=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{2}$，解得 $\boldsymbol{n}_1=(2,\sqrt{2},\sqrt{2})$. …………………………………………………………（8 分）

易知平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$. ………………………………………………………（9 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}\times 1}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………（11 分）

所以平面 PAD 与平面 PAM 夹角的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… (12 分)



21. **命题意图** 本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)因为点 $M(4,m)$ 在抛物线上,所以 $16=2pm$,

由抛物线的定义及 $|MF|=5$,得 $m+\frac{p}{2}=5$, ……………………………………… (2 分)

由 $\begin{cases} m+\frac{p}{2}=5, \\ 16=2pm, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=4, \\ p=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1, \\ p=8 \end{cases}$ (舍去), ……………………………………… (4 分)

所以 C 的方程为 $x^2=4y$. ……………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $M(4,4)$,设点 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$, $B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,

所以 $k_{MA}=\frac{x_1+4}{4}$, $k_{MB}=\frac{x_2+4}{4}$, ……………………………………… (7 分)

所以 $k_{MA}k_{MB}=\frac{x_1+4}{4}\times\frac{x_2+4}{4}=1$,得 $x_1x_2+4(x_1+x_2)=0$. (*) ……………………………………… (8 分)

设直线 AB 的方程为 $y=kx+b$,由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ x^2=4y \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4b=0$, ……………………………………… (9 分)

所以 $x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=-4b$,

代入(*)式中得 $-4b+16k=0$,所以 $b=4k$, ……………………………………… (11 分)

所以直线 AB 方程为 $y=kx+4k$,即 $y=k(x+4)$,

所以直线 AB 恒过定点 $(-4,0)$. ……………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 (Ⅰ)设 C 的右焦点为 $(c,0)$, $c>0$,

因为右焦点到直线 $\sqrt{2}x+y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{3}$,

所以 $\frac{|\sqrt{2}c+2|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$,解得 $c=2\sqrt{2}$. ……………………………………… (2 分)

因为离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $a=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2\sqrt{3}$, ……………………………………… (3 分)

所以 $b^2=a^2-c^2=4$, ……………………………………… (4 分)

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………… (5 分)

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $A(0,2)$.

当 $k=0$ 时，易知存在直线 l 满足题意.

当 $k\neq0$ 时，假设存在直线 $l:y=kx+m(k\neq0)$ 符合题意.

与椭圆方程联立得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 得 $(3k^2+1)x^2+6mkx+3m^2-12=0$. ……………………………（6 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则有 $\begin{cases}\Delta=36m^2k^2-4(1+3k^2)(3m^2-12)=12(12k^2-m^2+4)>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{6mk}{1+3k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{3m^2-12}{1+3k^2},\end{cases}$ …………（7 分）

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k\left(-\dfrac{6mk}{1+3k^2}\right)+2m=\dfrac{2m}{1+3k^2}$，

所以 MN 的中点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{3mk}{1+3k^2},\dfrac{m}{1+3k^2}\right)$. ……………………………………………………（8 分）

因为 $|AN|=|AM|$，所以 AP 是线段 MN 的垂直平分线，所以 $AP\perp MN$，显然此时 $m\neq0$.

所以 $k_{AP}=\dfrac{\dfrac{m}{1+3k^2}-2}{-\dfrac{3mk}{1+3k^2}}=-\dfrac{m-2-6k^2}{3mk}=-\dfrac{1}{k}$，……………………………………………………（9 分）

所以 $m=-1-3k^2$. ……………………………………………………………………………………（10 分）

将其代入 $\Delta=12(12k^2-m^2+4)>0$，并整理得 $(k^2-1)(9k^2+3)<0$，得 $-1<k<0$ 或 $0<k<1$.

综上，可知存在满足条件的直线 l，其斜率 k 的取值范围是 $(-1,1)$. ……………………………………（12 分）