高三数学参考答案及评分标准

2023.2

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1－4 AABD 5－8 DCBA

二、多项选择题(每小题 5 分,选对但不全的得 2 分,共 20 分)

9. BC 10. BCD 11. ACD 12. BCD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 26 14. $x^2=16y$(答案不唯一) 15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 16. $\frac{27}{128}$ $\frac{16}{5}$

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 解:(1)因为 $S_n=2^n+m$,

所以 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=2^{n-1}+m$, ………… 1 分

所以 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant 2)$. ………… 2 分

又由数列$\{a_n\}$为等比数列,

所以 $a_n=2^{n-1}$. ………… 3 分

又因为 $a_1=S_1=2^1+m=2^{1-1}=1$, ………… 4 分

所以 $m=-1$.

综上 $m=-1$,$a_n=2^{n-1}$. ………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=|n-6|$, ………… 6 分

当 $1\leqslant n\leqslant 6$ 时,$T_n=-\frac{-5+n-6}{2}\times n=\frac{11n-n^2}{2}$. ………… 7 分

当 $n>6$ 时,$T_n=T_6+\frac{1+n-6}{2}\times(n-6)$

$=15+\frac{(n-5)(n-6)}{2}$

$=\frac{n^2-11n+60}{2}$, ………… 9 分

所以 $T_n=\begin{cases}\frac{11n-n^2}{2}, & 1\leqslant n\leqslant 6,\\ \frac{n^2-11n+60}{2}, & n>6.\end{cases}$ ………… 10 分

18. 解:(1)若选①:整理得 $1-\tan A\tan C=-\sqrt{3}(\tan A+\tan C)$, ………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $\tan B=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{6}$; ………… 6 分

若选②:因为 $(2c-\sqrt{3}a)\cos B=\sqrt{3}b\cos A$,

由正弦定理得 $(2\sin C-\sqrt{3}\sin A)\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos A$, ………… 2 分

所以 $2\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin C$,$\sin C>0$,所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $B\in(0,\pi)$,

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$; ·· 6 分

若选③:由正弦定理整理得 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$, ···································· 2 分

所以$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$; ································· 6 分

(2)将 $c=b+1$ 代入正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

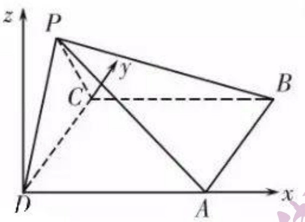
得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{b+1}{\sin C}$,

所以 $\sin C=\dfrac{b+1}{2b}$, ·· 8 分

因为 $B=\dfrac{\pi}{6}$,角 A 的解有两个,所以角 C 的解也有两个,所以$\dfrac{1}{2}<\sin C<1$,······ 10 分

即$\dfrac{1}{2}<\dfrac{b+1}{2b}<1$,又 $b>0$,所以 $b<b+1<2b$,解得 $b>1$. ······················ 12 分

19. 解:(1)证明:由题意知平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$ 且 $BC\perp CD$,



则 $BC\perp$ 平面 PCD, ·· 2 分

因为 $PD\subset$ 平面 PCD,

所以 $BC\perp PD$, ·· 3 分

又因为 $PD\perp PC$,$BC\cap PC=C$,

所以 $PD\perp$ 平面 PBC,

所以 $PD\perp PB$. ·· 5 分

(2)以点 D 为坐标原点,DA,DC 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,因为 $PC^2+PD^2=4$,所以 $PC=PD=\sqrt{2}$,所以 $P(0,1,1)$, ·· 7 分

所以$\overrightarrow{AP}=(-2,1,1)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$, ·································· 8 分

设平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

令 $x=1$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,0,2)$, ··· 10 分

设直线 PC 与平面 PAB 所成的角为 θ,

$$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{PC}>|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{PC}|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以直线 PC 与平面 PAB 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ································ 12 分

20. 解:(1)由题意得 $\bar{x}=176$,$\bar{y}=177$, ··· 1 分

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{156045-5\times176\times177}{155450-5\times176^2}=\frac{156045-155760}{155450-154880}=\frac{285}{570}=0.5,\cdots$$

··· 3 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=177-0.5\times176=89$,

所以回归直线方程为 $y=0.5x+89$,…………………………………………………… 4 分

令 $0.5x+89-x>0$ 得 $x<178$,即 $x<178$ 时,儿子比父亲高;

令 $0.5x-89-x<0$ 得 $x>178$,即 $x>178$ 时,儿子比父亲矮, ……………………… 5 分

可得当父亲身高较高时,儿子平均身高要矮于父亲,即儿子身高有一个回归,回归到全种群平均高度的趋势.(意思对即可) ………………………………………………… 6 分

(2) $\hat{y}_1=169,\hat{y}_2=174,\hat{y}_3=176.5,\hat{y}_4=181.5,\hat{y}_5=184$,所以 $\sum_{i=1}^{5}\hat{y}_i=885$,

又 $\sum_{i=1}^{5}y_i=885$,所以 $\sum_{i=1}^{5}\hat{e}_i=0$, ………………………………………………… 8 分

结论:对任意具有线性相关关系的变量 $\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=0$, …………………………………… 9 分

证明:$\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a})$

$=\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\hat{a}=n\bar{y}-n\hat{b}\bar{x}-n(\bar{y}-\hat{b}\bar{x})=0.$ …………………………… 12 分

21. 解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, ……………………………………………… 1 分

因为 $f'(x)=e^{x-1}\ln x+\dfrac{e^{x-1}}{x}=e^{x-1}(\ln x+\dfrac{1}{x})$, …………………………………… 2 分

记 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$, …………………………………… 3 分

所以当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$ 单调递减.

当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\geqslant h(1)=1$, ……………………………………………………………… 5 分

所以 $f'(x)=e^{x-1}(\ln x+\dfrac{1}{x})>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; ……… 6 分

(2)证明:原不等式为 $e^{x-1}\ln x\leqslant x^2-x=x(x-1)$,即 $\dfrac{\ln x}{x}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$, ………………… 7 分

即证 $\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$ 在 $x\in(0,2)$ 上恒成立,

设 $l(x)=\dfrac{x}{e^x}$,则 $l'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$, ……………………………………… 8 分

所以,当 $x<1$ 时,$l(x)$ 单调递增;当 $x>1$ 时,$l(x)$ 单调递减, ………………………… 9 分

令 $t(x)=\ln x-x+1$,$t'(x)=\dfrac{1}{x}-1$,易知 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

当 $x=1$ 时,$t(x)_{max}=0$,所以 $\ln x\leqslant x-1$,

且在 $x\in(0,2)$ 上有 $\begin{cases}\ln x<1,\\ x-1<1,\end{cases}$

所以可得到 $l(\ln x)\leqslant l(x-1)$,即 $\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$,

所以在 $x\in(0,2)$ 时,有 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由题意得 $\begin{cases}2c=2\sqrt{3}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，

解得 $c=\sqrt{3}, a=2$，

所以 $b=1$，…………………………………………………………………… 2 分

所以 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 3 分

(2) ①由题意得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x+1),\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{1+4k^2}, x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$， ………………………………………… 4 分

直线 MC 的方程为 $x=\dfrac{x_1-1}{y_1}y+1$，

代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 整理得，$[\dfrac{(x_1-1)^2}{y_1^2}+4]y^2+\dfrac{2(x_1-1)}{y_1}y-3=0$，

设 $C(x_3,y_3)$，则 $y_3y_1=\dfrac{-3y_1^2}{(x_1-1)^2+4y_1^2}=\dfrac{-3y_1^2}{5-2x_1}$，所以 $y_3=\dfrac{3y_1}{2x_1-5}$，

$x_3=\dfrac{5x_1-8}{2x_1-5}$，即 $C(\dfrac{5x_1-8}{2x_1-5},\dfrac{3y_1}{2x_1-5})$，同理 $D(\dfrac{5x_2-8}{2x_2-5},\dfrac{3y_2}{2x_2-5})$. ………………… 6 分

$k_{CD}=\dfrac{\dfrac{3y_2}{2x_2-5}-\dfrac{3y_1}{2x_1-5}}{\dfrac{5x_2-8}{2x_2-5}-\dfrac{5x_1-8}{2x_1-5}}=\dfrac{21k(x_1-x_2)}{9(x_1-x_2)}=\dfrac{7k}{3}$，…………………………………… 7 分

所以直线 CD 的方程为 $y-\dfrac{3y_1}{2x_1-5}=\dfrac{7k}{3}(x-\dfrac{5x_1-8}{2x_1-5})$，即 $y=\dfrac{7k}{3}(x-\dfrac{13}{7})$，

所以直线 CD 过定点 $(\dfrac{13}{7},0)$. ……………………………………………………………… 8 分

②因为 $k_{CD}=\dfrac{7k}{3}$，所以 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 正负相同，且 $\alpha>\beta$，所以 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，$\tan(\alpha-\beta)$ 取得最大值. ……………………………… 10 分

由 $k>0$ 时，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\dfrac{4k}{3}}{1+\dfrac{7k^2}{3}}=\dfrac{4k}{3+7k^2}=\dfrac{4}{\dfrac{3}{k}+7k}\leqslant\dfrac{4}{2\sqrt{21}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$；

所以当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 时等号成立，$\tan(\alpha-\beta)$ 取得最大值，$\alpha-\beta$ 取得最大值，

此时直线 CD 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{21}}{3}(x-\dfrac{13}{7})$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。