

长郡中学 2020 届高三适应性考试 (三)

理科数学参考答案

命题人：高三理数备课组 审题人：

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	C	A	B	A	C	B	D	A	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{7}{17}$ 14. $(0, 0)$ 15. $(3e, +\infty)$ 16. 1.7820

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(I) ① $\frac{b-a}{c} = \frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}$, 化为: $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{\sqrt{6}}{3} = \cos B$.

由 $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $\frac{5\pi}{6} < B < \pi$ (2 分)

② $\cos 2A + 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1$, 化为: $\cos A = \frac{1}{2}$, $A \in (0, \pi)$, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$. (4 分)

可得①②不能同时出现作为条件.

∴满足有解三角形的序号组合有: ①③④, ②③④. (6 分)

(II) 取②③④. (7 分)

由正弦定理可得: $\frac{\sqrt{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$, 解得 $\sin B = 1$ (8 分)

$B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{2}$ (10 分)

$\therefore c = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{3}$ (12 分)

18. 解：(I) 根据题中所给的条形图，易知总场数为 100， $\therefore$ 抽样比为 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$,

$\therefore a_1, a_2, a_3, a_4$ 分别为 5, 7, 8, 5,

$\therefore$ 这两数和 ξ 的所有可能的取值为 10, 12, 13, 15. (2 分)

且 $P(\xi=10) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$, $P(\xi=12) = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}$,

$P(\xi=13) = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}$, $P(\xi=15) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$,

$\therefore$ 随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	10	12	13	15
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore E(\xi) = 10 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{3} + 13 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{6} = 12.5$ (6 分)

理科数学试题参考答案 (第 1 页, 共 6 页)

$$(II) \textcircled{1} \because \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 700, \quad \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = 70,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{70}{700} = 0.1.$$

$$\hat{a} = \bar{z} - \hat{b}\bar{x} = 4.5 - 0.1 \times 25 = 2,$$

$\therefore z$ 与 x 之间的回归直线方程为: $\hat{z} = 0.1x + 2$ (8 分)

$$\textcircled{2} \because z = 0.1e^{\frac{y}{4343}} + 2 = 0.1x + 2,$$

$$\therefore y = 4343 \ln x,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{y}{x+40} = \frac{4343 \ln x}{x+40},$$

$$\text{则 } g'(x) = 4340 \frac{1 + \frac{40}{x} - \ln x}{(x+40)^2},$$

$$\text{当 } x = e^3 = 20 \text{ 时, } g'(x) = 0,$$

$\therefore$ 当 $x \in [0, 20]$ 时, $g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[0, 20]$ 上单调递增. (10 分)

当 $x \in [20, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[20, +\infty)$ 上单调递减. ... (11 分)

$\therefore$ 这四个篮球馆月惠值最大时 x 的值为 20. (12 分)

19. 解: (I) 连接 AC_1 , BC_1 ,

在梯形 A_1C_1CA 中, $AC = 2A_1C_1$,

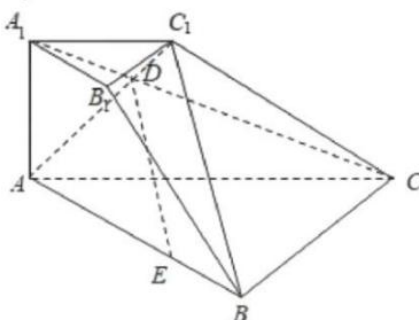
$$\because AC_1 \cap A_1C = D, \quad \overline{CD} = 2\overline{DA_1},$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\overline{DA_1},$$

$$\text{又 } \overline{AE} = 2\overline{EB}, \quad \therefore DE \parallel BC_1,$$

$$\because BC_1 \subset \text{平面 } BCC_1B_1, \quad DE \not\subset \text{平面 } BCC_1B_1,$$

$$\therefore DE \parallel \text{平面 } BCC_1B_1. \quad \text{..... (4 分)}$$



(II) 侧面 A_1C_1CA 是梯形, $\therefore A_1A \perp A_1C_1$, $\therefore A_1A \perp AC$,

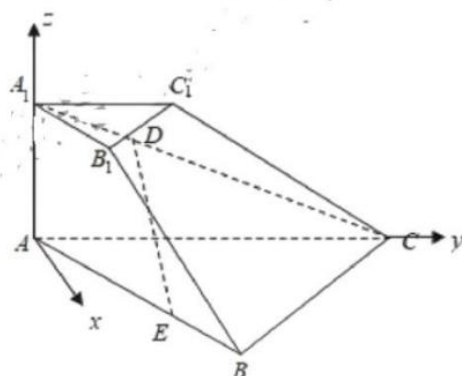
又 $A_1A \perp AB$, $\therefore \angle BAC$ 为二面角 C_1-AA_1-B 的平面角, 则 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \triangle ABC$, $\triangle A_1BC_1$ 均为正三角形. (6 分)

在平面 ABC 内, 过点 A 作 AC 的垂线, 如图建立空间直角坐标系,

不妨设 $AA_1 = 1$, 则 $A_1B_1 = A_1C_1 = 2$, $AC = BC = 4$,

故点 $A_1(0, 0, 1)$, $C(0, 4, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 2, 0)$, $B_1(\sqrt{3}, 1, 1)$.



设平面 A_1B_1BA 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 2\sqrt{3}x_1 + 2y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB_1} = \sqrt{3}x_1 + y_1 + z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_1 = -\sqrt{3}, \text{ 得 } \vec{m} = (1, -\sqrt{3}, 0);$$

设平面 C_1B_1BC 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = 2\sqrt{3}x_2 - 2y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CB_1} = \sqrt{3}x_2 - 3y_2 + z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_2 = \sqrt{3}, \text{ 得 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}).$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{1}{4}. \dots\dots (10 \text{ 分})$$

故平面 A_1B_1BA 与平面 C_1B_1BC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{1}{4}$ (12 分)

20. 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 由已知得, $f'(x) = \frac{a(x-1)(x+\frac{1}{a})}{x}$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. (1 分)

(2) 当 $a < 0$ 时,

①当 $-\frac{1}{a} < 1$ 时, 即 $a < -1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得: $-\frac{1}{a} < x < 1$;

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递增.

②当 $-\frac{1}{a} = 1$ 时, 即 $a = -1$ 时, 显然, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无增区

间;

③当 $-\frac{1}{a} > 1$ 时, 即 $-1 < a < 0$ 时, 令 $f'(x) \geq 0$, 解得 $1 < x < -\frac{1}{a}$

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(1, -\frac{1}{a})$ 上单调递增.

综上所述: (1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. (3 分)

(3) 当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递增. (4 分)

(4) 当 $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 无单调递增区间. (5 分)

(5) 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, -\frac{1}{a})$ 上单调递增. (6 分)

(II) 假设函数 $f(x)$ 存在“中值相依切线”.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上的不同两点, 且 $0 < x_1 < x_2$,

则 $y_1 = x_1^2 - x_1 - \ln x_1$, $y_2 = x_2^2 - x_2 - \ln x_2$ (7 分)

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 1 - \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1},$$

曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率:

$$k = f'(x_0) = f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) = x_1 + x_2 - 1 - \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$x_2 + x_1 - 1 - \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 - 1 - \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$\therefore \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{x_1 + x_2}, \text{ 即 } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(\frac{x_2}{x_1} - 1)}{\frac{x_2}{x_1} + 1} = 0. \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} > 1$$

$$\text{设 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{1+t}, \text{ 则 } h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

∴ $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增,

$\therefore h(t) > h(1) = 0$ (10 分)

故 $h(t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 无解, 假设不成立. (11 分)

综上所述, 假设不成立, 所以, 函数 $f(x)$ 不存在“中值相依切线”. (12 分)

21. 解: (I) 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

可设过 F 的直线 l 的方程为 $y = k(x - \frac{p}{2})$, $k \neq 0$,

联立抛物线方程可得 $k^2x^2 - (k^2p + 2p)x + \frac{k^2p^2}{4} = 0$ (2 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 可得 $y_1y_2 = \frac{p^2}{4}$,

由 B 为 AC 的中点, 且 $C(-\frac{p}{2}, -kp)$, 可得 $A(\frac{3}{2}p, kp)$, $B(\frac{1}{6}p, \frac{\sqrt{3}}{3}p)$,

由 $k^2p^2 = 3p^2$, 可得 $k = -\sqrt{3}$ (4 分)

则 $|BC| = \sqrt{(\frac{2}{3}p)^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3}p)^2} = \frac{4}{3}p = \frac{8}{3}$, 即 $p = 2$ (5 分)

可得抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ (6 分)

(II) 可设直线 l 的方程为 $x = m(y - 1)$, 联立抛物线的方程 $y^2 = 4x$,

可得 $y^2 - 4my + 4m = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1y_2 = 4m$.

则 $k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{4}{y_1} + \frac{4}{y_2} = 4 \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2} = 4$ (8 分)

即有 $-16a_{n+1} + (4a_n + 2)^2 = 4$, 即为 $a_{n+1} = a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1)$,

则 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + 1}$,

而 $\frac{a_n}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{a_n + 1} = 1 - (\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}})$,

则 $S_{2020} = 2020 - (\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2020}} - \frac{1}{a_{2021}})$
 $= 2020 - 1 + \frac{1}{a_{2021}} = 2019 + \frac{1}{a_{2021}}$ (10 分)

由 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n(a_n + 1) > 1$, 可得 $m = 2019$ (12 分)

22. 解: (I) 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 4\cos\theta$, 即 $\rho^2 = 4\rho\cos\theta$.

化为直角坐标方程是: $x^2 + y^2 = 4x$, 即 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ (2 分)

直线 l 的直角坐标方程为: $y = x - m$,

$\therefore$ 圆心 $(2, 0)$ 到直线 l 的距离 (弦心距) 为 $d = \sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{14}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

圆心 $(2, 0)$ 到直线 $y = x - m$ 的距离为: 即 $\frac{|2 - 0 - m|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4 分)

$\therefore |m - 2| = 1$, 解得 $m = 1$ 或 $m = 3$ (5 分)

(II) 曲线 C 的方程可化为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ (6 分)

其参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数);

又 $M(x, y)$ 为曲线 C 上任意一点,

$\therefore x + y = 2 + 2\cos\theta + 2\sin\theta = 2 + 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ (8 分)

$\therefore x + y$ 的取值范围是 $[2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}]$ (10 分)

23. 解: (I) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x + 1| - |x - 1| = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$ (2 分)

由 $f(x) \geq -1$, 得 $x \geq -\frac{1}{2}$ (3 分)

故不等式 $f(x) \geq -1$ 的解集为 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ (4 分)

(II) $\because$ “ $\forall x \in R, f(x) < 2a + 1$ ” 为假命题,

$\therefore$ “ $\exists x \in R, f(x) \geq |2a + 1|$ ” 为真命题, $\therefore f(x)_{\max} \geq |2a + 1|$ (6 分)

$\because f(x) = |x + 1| - |x + a| \leq |(x + 1) - (x + a)| = |a - 1|$,

$\therefore f(x)_{\max} = |a - 1|$, 则 $|a - 1| \geq |2a + 1|$, $\therefore (a - 1)^2 \geq (2a + 1)^2$ (8 分)

即 $a^2 + 2a \leq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 0$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[-2, 0]$ (10 分)

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

福利：

- 1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题