海淀区高三年级第二学期期中练习参考答案

数　学（文科）　　2019.04

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A　2. C　3. D　4. D　5.B　6. B　7. C　8. B

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 1　　10. 6, $\frac{15\sqrt{7}}{4}$　　11. 48

12. $(-1,2)$（答案不唯一）　13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$　　14. 2, $[0,+\infty)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（共 13 分）

解：（I）因为 $a_5+a_2=2$， $d=2$

所以 $2a_1+5d=2a_1+10=2$，

所以 $a_1=-4$

所以 $a_n=2n-6$

（II） $S_m=\frac{(a_1+a_m)m}{2}=m^2-5m$

又 $a_9=12$， $a_{15}=24$

因为 S_m,a_9,a_{15} 是等比数列，

所以 $(a_9)^2=S_m a_{15}$

所以 $m^2-5m-6=0$

$m=6, m=-1$

因为 $m\in\mathbf{N}^*$ ，所以 $m=6$

16.（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(0)=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})\cos 0+a=1$

$2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+a=1$

所以 $a=-1$

（Ⅱ）$f(x)=2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x-1$

$=(2\sin x+2\cos x)\cos x-1$

$=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

由图象得 $2x_0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

所以 $x_0=\frac{\pi}{8}$

函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\pi+\frac{1}{8}\pi)$， $k\in\mathbf{Z}$

17.（共 14 分）

解：（I）证明：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1B_1 /\!/ AB$

又因为 D,E 分别为 A_1C_1,B_1C_1 的中点，所以 $DE /\!/ A_1B_1$

于是 $DE /\!/ AB$

$AB\not\subset$ 平面 DEF， $DE\subset$ 平面 DEF

所以 $AB /\!/$ 平面 DEF

（II）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$CC_1\perp$ 平面 ABC， $AC\subset$ 平面 ABC， $BC\subset$ 平面 ABC

所以 $CC_1\perp AC$， $CC_1\perp BC$

又 $AC\perp BC$

$BC\cap CC_1=C$， $BC,CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1

所以 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1

$EF \subset$ 平面 BCC_1B_1

所以 $AC \perp EF$

又因为 $BC = CC_1 = 2$，$CC_1 \perp BC$，

所以侧面 BCC_1B_1 为正方形，故 $BC_1 \perp CB_1$

而 E,F 分别为 B_1C_1, BB_1 的中点，连结 BC_1，所以 $EF \parallel BC_1$

所以 $EF \perp CB_1$，又 $AC \cap CB_1 = C$，$AC, CB_1 \subset$ 平面 ACB_1

所以 $EF \perp$ 平面 ACB_1

又 $EF \subset$ 平面 DEF

所以平面 $ACB_1 \perp$ 平面 DEF

（III） $V_{E-ACB_1} = V_{A-ECB_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta ECB_1} \cdot AC = \frac{2}{3}$

18.（共 13 分）

解：（Ⅰ）人工造林面积与造林总面积比最大的地区为甘肃省，

人工造林面积占造林总面积比最小的地区为青海省

（Ⅱ）设在这十个地区中，任选一个地区，该地区人工造林面积占总面积的比比不足 50% 为

事件 A

在十个地区中，有 3 个地区（重庆、新疆、青海）人工造林面积占总面积比不足 50%，

则 $P(A) = \frac{3}{10}$

（III）设至少有一个地区退化林修复面积超过五万公顷为事件 B

新封山育林面积超过十万公顷有 4 个地区：内蒙、河北、新疆、青海，分别设为

a_1, a_2, a_3, a_4，其中退化林修复面积超过五万公顷有 2 个地区：内蒙、河北即 a_1, a_2

从 4 个地区中任取 2 个地区共有 6 种情况，

$(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_3,a_4)$

其中至少有一个地区退化林修复面积超过五万公顷共有 5 种情况，

$(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_2,a_3),(a_2,a_4)$

则 $P(B)=\dfrac{5}{6}$

19. （共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=6,\quad x>0$ 时， $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x-1$

所以 $f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，

令 $f'(x)=0,$ 得 $x=2$， 或 $x=3$.

当 x 变化时， $f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增区间是 $(0,2)$， $(3,+\infty)$， 单调递减区间是 $(2,3)$

（Ⅱ）当 $a<0$ 时，

若 $x<0$， 则 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-ax-1$，

所以 $f'(x)=x^2-5x-a=x(x-5)-a$

因为 $x<0,a<0$， 所以 $f'(x)>0$

若 $x>0$， 则 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+ax-1$，

所以 $f'(x)=x^2-5x+a$

令 $f'(x)=0,\quad \Delta=25-4a>0$，

所以有两个不相等的实根 x_1,x_2， 且 $x_1x_2<0$

不妨设 $x_2>0$， 所以当 x 变化时， $f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	无定义	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为函数 $f(x)$ 图象是连续不断的，

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 即存在极大值又有极小值

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A(-2,0)$，所以 $a=2$

因为两个焦点与短轴一个顶点构成等腰直角三角形，

所以 $b=c$

又 $b^2+c^2=a^2$

所以 $b=c=\sqrt{2}$ ，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）**方法一：**

设 $M(x_m,y_m)$

$k_{MP}=\dfrac{y_m}{x_m-1}$，$k_{AM}=\dfrac{y_m}{x_m+2}$

$k_{AM}\cdot k_{MP}=-1$

$$\begin{cases}\dfrac{y_m}{x_m-1}\cdot\dfrac{y_m}{x_m+2}=-1\\ \dfrac{x_m^2}{4}+\dfrac{y_m^2}{2}=1\end{cases}$$

$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases}$（舍）

所以 $|AM|=\sqrt{6}$

方法二：

设 $M(x_m,y_m)$，

因为 AM 与 MN 垂直，

所以点 M 在以 AP 为直径的圆上，

又以 AP 为直径的圆的圆心为 $(-\dfrac{1}{2},0)$，半径为 $\dfrac{3}{2}$，方程为 $(x+\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

$$\begin{cases}(x_m+\frac{1}{2})^2+{y_m}^2=\frac{9}{4}\\ \frac{{x_m}^2}{4}+\frac{{y_m}^2}{2}=1\end{cases},$$

$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases}$（舍）

所以$|AM|=\sqrt{6}$

方法三：

设直线 AM 的斜率为 k，$l_{AM}:y=k(x+2)$ ，其中 $k\neq 0$

$$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

化简得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

当 $\Delta>0$ 时，$x_A\cdot x_M=\dfrac{8k^2-4}{1+2k^2}$

得 $x_M=\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}$ ，$y_M=\dfrac{4k}{2k^2+1}$

显然直线 AM,MN 存在斜率且斜率不为 0.

因为 AM 与 MN 垂直，

所以 $k_{MP}=\dfrac{\frac{4k}{2k^2+1}}{\frac{2-4k^2}{1+2k^2}-1}==-\dfrac{1}{k}$

得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_M=0$

所以$|AM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_M+2|=\sqrt{6}$

（III）直线 NQ 恒过定点 $(2,0)$

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由题意，设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases}x=my+1,\\ x^2+2y^2-4=0\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$，

显然，$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+2}$，

因为直线 PQ 与 AM 平行，所以 $k_{PQ}=k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，

则 PQ 的直线方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x-1)$，

令 $x=\dfrac{5}{2}$，则 $y=\dfrac{\frac{3}{2}y_1}{x_1+2}=\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}$，即 $Q(\dfrac{5}{2},\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)})$

$$k_{NQ}=\frac{y_2-\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}}{x_2-\dfrac{5}{2}}=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{(my_1+3)(2my_2-3)},$$

直线 NQ 的方程为 $y-y_2=\dfrac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}(x-x_2)$

$$y=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}x-\frac{(2my_1y_2+6y_2-3y_1)(my_2+1)}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}+y_2$$

$$=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}x-\frac{2my_1y_2+15y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}$$

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2my_1y_2+15y_2-3y_1}{2my_1y_2+6y_2-3y_1}$

因为 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，故 $x=\dfrac{18y_2}{9y_2}=2$，

所以直线 NQ 恒过定点 $(2,0)$.