大连市 2022～2023 学年度第二学期期末考试

高二数学参考答案

一、选择题：

1．B　2．D　3．B　4．A　5．C　6．D　7．D　8．A

二、选择题：

9．BD　10．BC　11．BCD　12．ABD

三、填空题：

13．4

14．1

15．$(-\infty,\dfrac{3}{64})$

16．$\left(\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{1}{e}\right)$

四、解答题：

17．解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$．

由题意，得$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d)\times\dfrac{1}{4}(4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d)=[\dfrac{1}{5}(5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d)]^2\\ \dfrac{1}{3}(3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d)+\dfrac{1}{4}(4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d)=2\times(-\dfrac{5}{4})\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-5\\ d=3\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=0\\ d=0\end{cases}$(舍)

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-8$　……………………………………5 分

(2) $b_n=\dfrac{1}{(3n-8)(3n-5)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-8}-\dfrac{1}{3n-5})$

所以$T_n=\dfrac{1}{3}[(-\dfrac{1}{5})-(-\dfrac{1}{2})+(-\dfrac{1}{2})-1+1-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{3n-11}-\dfrac{1}{3n-8}+\dfrac{1}{3n-8}-\dfrac{1}{3n-5}]$

$=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3n-5})=-\dfrac{n}{15n-25}$　……………………………………10 分

18．解：(1)设事件A为“该局比赛乙以 11：9 获胜”

则$P(A)=C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot(1-\dfrac{3}{4})\cdot(\dfrac{2}{3})^2+(1-\dfrac{3}{4})^2\cdot(1-\dfrac{2}{3})\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{72}$．　……………………………………6 分

(2)随机变量X的所有可能取值为 2，3，4.

$P(X=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$

$P(X=3)=C_2^1\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+(\dfrac{2}{5})^3=\dfrac{44}{125}$

$P(X=4)=C_3^1\times\dfrac{3}{5}\times(\dfrac{2}{5})^2\times\dfrac{3}{5}+C_3^2\times(\dfrac{2}{5})^2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{36}{125}$

所以X的分布列为

X	2	3	4
P	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{44}{125}$	$\dfrac{36}{125}$

……………………………………10 分

$E(X)=2\times\frac{9}{25}+3\times\frac{44}{125}+4\times\frac{36}{125}=\frac{294}{125}$. ……………………………………12 分

19. 解：(1) 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 的定义域为 R，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$， ………………………………1 分

当 $a\le 0$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 R 上单调递增； ……………………………………3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$， $x<\ln a$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，

故 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,\ln a)$，增区间为 $(\ln a,+\infty)$. ……………………………………6 分

(2) 若 $a<e$，则 $f(x)>e^x-ex$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x-g(x)-1+2\ln 2$，

则 $h(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x-2\ln(x+1)+x-1+2\ln 2$，

$h'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}-\frac{2}{x+1}+1$，

又当 $x>0$ 时，$h'(x)$ 单调递增且 $h'(1)=0$， ……………………………………9 分

则当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

故 $h(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$.

故 $h(x)>h(1)=0$， ……………………………………11 分

即 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x>2\ln(x+1)+x+1-2\ln 2$，

所以 $f(x)>g(x)+1-2\ln 2$. ……………………………………12 分

注：其他解法，相应给分

20.（1）解：由题知，25 周岁以上的工人抽取 $100\times\frac{300}{200+300}=60$ 人，其中日平均生产件数不足 60 件的工人有 $60\times 0.0050\times 10=3$ 人，分别记为 A,B,C；

25 周岁以下的工人抽取 $100\times\frac{200}{200+300}=40$ 人，其中日平均生产件数不足 60 件的工人有 $40\times 0.0050\times 10=2$ 人，分别记为 a,b； ………………………………2 分

所以，从样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中随机抽取 2 人，共有

$(A,B),(A,C),(A,a),(A,b),(B,C),(B,a),(B,b),(C,a),(C,b),(a,b)$ 共 10 种情况；

其中，至少抽到一名“25 周岁以下组”工人的情况有 $(A,a),(A,b),(B,a),(B,b),(C,a),(C,b),(a,b)$，共 7 种，

所以，所求事件的概率为 $P=\frac{7}{10}$ ………………………………4 分

（2）解：由题知，25 周岁以上的工人抽中日平均生产件数不少于 80 件的工人有 $60\times(0.0050+0.02)\times 10=15$ 人，少于 80 件的工人有 45 人，

25 周岁以下的工人抽中日平均生产件数不少于 80 件的工人有 $40\times(0.0325+0.0050)\times10=15$ 人，少于 80 件的工人有 25 人 ……………………………6 分

所以，有如下列联表：

	25 周岁以上	25 周岁以下
生产技术能手	15	15
非生产技术能手	45	25

所以，$\chi^2=\dfrac{100\times(15\times25-15\times45)^2}{60\times40\times30\times70}=\dfrac{25}{14}\approx1.786<2.706$

所以，没有 90%的把握认为“生产技术能手与工人所在的年龄组有关”. …………………8 分

(3) 从频率分布直方图可得样本中日均生产量在 $[80,90)$ 的频率为 $0.2\times0.6+0.325\times0.4=0.25=\dfrac{1}{4}$

设在抽取的 20 名工人中，日均生产量在 $[80,90)$ 的人数为 X，则 $X\sim B(20,\dfrac{1}{4})$，

所以 $P(X=k)=\mathrm{C}_{20}^{k}(\dfrac{1}{4})^{k}(\dfrac{3}{4})^{20-k}$，

设 $t=\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\dfrac{\mathrm{C}_{20}^{k}(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{20-k}}{\mathrm{C}_{20}^{k-1}(\frac{1}{4})^{k-1}(\frac{3}{4})^{21-k}}=\dfrac{21-k}{3k}$，

当 $t>1$ 时，$k<5.25$，$P(X=k-1)<P(X=k)$，

当 $t<1$ 时，$k>5.25$，$P(X=k-1)>P(X=k)$，

所以当 $k=5$ 时，P_k 最大. ……………………………………12 分

21. 解：(1) 因为 $a_1=2$，所以 $S_1=a_1=2$，$3a_1-2S_1=2$， ……………………………………1 分

又 $\{3a_n-2S_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

所以 $3a_n-2S_n=2+2(n-1)=2n$， ……………………………………………3 分

故当 $n\geq2$ 时，$3a_{n-1}-2S_{n-1}=2(n-1)$，$3a_n-3a_{n-1}-2S_n+2S_{n-1}=2$，整理得：$a_n-3a_{n-1}=2$，

即 $a_n+1=3(a_{n-1}+1)$，又 $a_1+1=3$，所以 $\{a_n+1\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，即 $a_n+1=3^n$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=3^n-1$； ……………………………………6 分

(2) 因为当 $0<a\leqslant b$ 时，有 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{a-b}{b(b+1)}\leqslant0$

因为 $3^n=(1+2)^n=1+C_n^1\cdot2+C_n^2\cdot2^2+\cdots+C_n^n2^n$

所以 $3^n\geqslant1+2n$（当且仅当 $n=1$ 时，等号成立）

所以 $b_n=\dfrac{2n}{a_n}=\dfrac{2n}{3^n-1}\leq\dfrac{2n+1}{3^n}$

所以 $T_n\leq\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\dfrac{7}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n+1}{3^n}$， ……………………………………………8 分

记 $W_n=\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2n+1}{3^n}$，则 $\frac{1}{3}W_n=\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\cdots+\frac{2n+1}{3^{n+1}}$，

$$\frac{2}{3}W_n=\frac{3}{3}+(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots+\frac{2}{3^n})-\frac{2n+1}{3^{n+1}}=1+\frac{\frac{2}{3^2}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n+1}{3^{n+1}}=\frac{4}{3}--\frac{1}{3^n}-\frac{2n+1}{3^{n+1}}<\frac{4}{3},$$

所以 $W_n<2$，$T_n<2$． ……………………………………12 分

22.解：(1) $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上只有一个极值点和一个零点.

证明如下：$f'(x)=-2\sin x+\frac{1}{x+1}$，$f''(x)=-2\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f''(x)<0$　所以 $f'(x)$ 是单调递减函数

又 $f'(0)=1>0$，$f'(\frac{\pi}{2})=-2+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}=-2+\frac{2}{\pi+2}<0$

所以存在唯一的 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\alpha)=0$ ………………………………3 分

所以当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 上单调递增，在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减

所以 α 为 $f(x)$ 的一个极大值点 ………………………………4 分

因为 $f(0)=2-1=1>0$，$f(\alpha)>f(0)>0$，$f(\frac{\pi}{2})=\ln(\frac{\pi}{2}+1)-1<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\alpha]$ 上无零点，在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点；

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上只有一个极值点和一个零点 ………………………………6 分

(2)由 $f(x)\le ax+1$，得 $2\cos x+\ln(1+x)-ax-2\le 0$

令 $g(x)=2\cos x+\ln(1+x)-ax-2\ (x\ge 0)$，则 $g(0)=0$

$g'(x)=-2\sin x+\frac{1}{1+x}-a$，$g'(0)=1-a$

①若 $a\ge 1$，则 $-a\le -1$，当 $x\ge 0$ 时，$-ax\le -x$

令 $h(x)=\ln(x+1)-x$，则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$h'(x)\le 0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(0)=0$

所以当 $h(x)\leqslant h(0)$，所以 $\ln(x+1)-x\leqslant 0$，即 $\ln(x+1)\leqslant x$

又 $\cos x\leqslant 1$　所以 $g(x)\leqslant 2+x-x-2=0$

即当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$ 恒成立 ………………………………9 分

②若 $0\le a<1$，因为当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)$ 单调递减

且 $g'(0)=1-a>0$， $g'(\frac{\pi}{2})=-2+\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{2}}-a<0$

所以存在唯一的 $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(\beta)=0$

当 $x\in(0,\beta)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(0,\beta)$ 上单调递增，不满足 $g(x)\le 0$ 恒成立；

③若 $a<0$

因为 $g(\mathrm{e}^4-1)=2\cos(\mathrm{e}^4-1)+\ln(\mathrm{e}^4)-a(\mathrm{e}^4-1)-2=2-2\cos(\mathrm{e}^4-1)-a(\mathrm{e}^4-1)>0$

不满足 $g(x)\le 0$ 恒成立；

综合所述，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$ ……………………………12 分