秘密★启用前

2023 高考全国卷地区高三年级 3 月联考

数 学（理科）

考生注意：

1. 本试卷共 2 页。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置。
3. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题卷上无效。
4. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
5. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|\frac{x+1}{x-3}\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|-8<(x-1)^3<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $[-1,2)$　　C. $\{0,1\}$　　D. $[-1,2]$

2. 若 $(a-b\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)=\mathrm{i}-3$（$a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），则 $a+b=$

A. -3　　B. -4　　C. -1　　D. 6

3. 已知 a 是一条直线，α,β 是两个不重合的平面，且 $a\perp\alpha$，则“$a/\!/\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

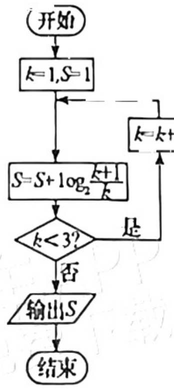
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,5)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

5. 下列函数中是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $f(x)=x^3-x$　　B. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$　　C. $f(x)=\lg\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　　D. $f(x)=\frac{3x^2-1}{}+\sin x$

6. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 为



A. $\log_2 3$　　B. $1+\log_2 3$　　C. 3　　D. $1+\log_2 5$

7. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$A(4,n)$ 为 C 上一点，且 $|AF|=5$，延长 AF 与 C 交于点 B，则 $|AB|=$

A. $\frac{25}{4}$　　B. $\frac{21}{4}$　　C. 6　　D. 7

8. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$\dfrac{a\sin C}{b\cos A+a\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$a=\sqrt{3}$,$b=2$,则$\triangle ABC$的面积为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 3

9. 有男、女生各3人参加某公司招聘,按随机顺序逐个进行面试,那么任何时候等待面试的男生人数都不多于女生人数的面试顺序种数为

A. 90　　B. 120　　C. 180　　D. 360

10. 克拉茨猜想表述如下:对于任意正整数a_1,定义递归数列$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1, a_n\text{ 为奇数}, n\in\mathbf{N}^*,\\ \dfrac{a_n}{2}, a_n\text{ 为偶数}, n\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$则按照这种规律一直迭代,最终会陷入1,4,2,1,4,2,……的无限循环中.如果对正整数a_1按照上述规则变换后的第9项为1,则a_1的值不可能是

A. 5　　B. 42　　C. 60　　D. 256

11. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$的图象与$y$轴交于点$(0,1)$,且在$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递增,$f(x)\leqslant f(2\pi)$恒成立.将函数$f(x)$图象的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{3}$倍(纵坐标不变),再向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度,得到函数$g(x)$的图象,记函数$g(x)$的导函数为$g'(x)$.下列说法正确的个数是

①$f(x)=2\sin(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{6})$;②函数$g(x)$的图象关于$y$轴对称;

③当$x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$时,$g(x)>f(x)$恒成立;④$g'(x)\geqslant g'(\dfrac{\pi}{3})$恒成立.

A. 0　　B. 1　　C. [illegible]　　D. 3

12. 直线l与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右两支分别交于点$A$、$B$,与双曲线的两条渐近线分别交于点$C$、$D$($A$、$C$、$D$、$B$从左到右依次排列),若$\angle AOB=90°$,且$|CD|$是$|AC|$,$|DB|$的等差中项,则双曲线的离心率的取值范围是

A. $[\dfrac{\sqrt{10}}{2},+\infty)$　　B. $[2\sqrt{2},\sqrt{10}]$　　C. $[\dfrac{\sqrt{10}}{2},2\sqrt{3}]$　　D. $[\sqrt{10},+\infty)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 曲线$f(x)=ax^3+bx+2\ln x+1$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$x-y+1=0$,则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=$________.

14. 若实数x,y满足不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ y-2x\geqslant 2,\\ x+3y\leqslant 3,\end{cases}$则$\dfrac{y}{x+2}$的取值范围为

15. 在三棱锥$A-BCD$中,底面$\triangle BCD$是等边三角形,$AD\perp$底面BCD,$BC=\sqrt{3}$,$AD=3$,则三棱锥$A-BCD$的外接球的体积为________.

16. 若关于x的方程$x^2-(2+a)x+1=\dfrac{x^2}{e^x}$有两个不等的正实根,则实数$a$的取值范围是________.

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17.(本小题满分12分)

已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_3=9$,a_1,a_2,a_5成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式; 2n.

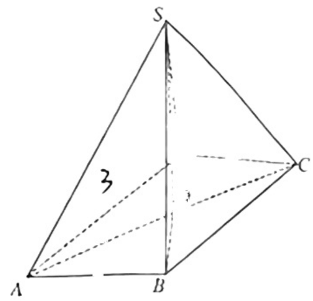
(2)设$b_n=a_n\cdot 2^{n-1}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和.(ζ)

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，AC 与 BD 交于点 O，$SO\perp$ 底面 $ABCD$，$AB=1$，$AD=SO=3$，$\cos\angle BAD=\frac{1}{3}$.

(1)证明：$CD\perp SD$；

(2)求二面角 $S-BC-D$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

甲、乙两人玩一种智力积分游戏，游戏规则如下：游戏由排好顺序的 3 道选择题组成，每道选择题都有 4 个选项，其中只有 1 个正确答案，每道题答对得 5 分，答错得 0 分，放弃作答得 2 分，游戏满分是 15 分. 已知 3 道题甲、乙作答时均没有十足把握选出正确选项，每道作答时只能采用如下三种方法中的一种：一是能排除某些错误选项，则可以在剩余选项中随机选择一项作答；二是不能排除任何选项，则可以随机选择一项答案；三是直接放弃作答.

(1)已知甲可以排除前 2 题每题中的 1 个错误选项，放弃作答第 3 题，求甲获得 12 分的概率； 5

(2)若乙可以排除前 2 题每题中的 2 个错误选项，放弃作答第 3 题，问前 2 题应该采用怎样的作答方法可使这 2 题得分最高？请你通过数学期望帮助乙做出决策，并给出理由.

20.（本小题满分 12 分）

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，左、右顶点分别为 A、B，上、下顶点分别为 P、Q，且 $\triangle ABP$ 和 $\triangle F_1F_2Q$ 的面积分别为 2 和 $\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)已知直线 l 的斜率为 k，若直线 l 与 C 交于 E、F 两点，且 $|PE|=|PF|$，求实数 k 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-2x+m\ln x+\frac{1}{x}(m\in\mathbf{R})$.

(1)当 $m=1$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)设 $g(x)=f(x)-(x-1)^2$,若存在 $x_1+x_2=2(x_1\neq x_2)$,使得 $g(x_1)=g(x_2)$,求实数 m 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22,23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[**选修 4—4:坐标系与参数方程**](本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\frac{\quad}{\sin\theta+\cos\theta}$

(1)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)若点 P 是曲线 C_1 上一点,求点 P 到曲线 C_2 的距离的取值范围.

23.[**选修 4—5:不等式选讲**](本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-1|-|x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)<1$ 的解集;

(2)设 $f(x)$ 的最小值为 m,若正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$,求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的取值范围.

超级全能生2023高考全国卷地区高三年级3月联考·数学(理科)
参考答案、提示及评分细则

1. C　集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1\}$，故选 C.

2. A　由题知，$a-bi=\frac{i-3}{i+1}=\frac{(i-3)(i-1)}{(i+1)(i-1)}=-1+2i$，$\therefore a=-1,b=-2$，$\therefore a+b=-3$，故选 A.

3. A　若 $a\perp\alpha,a/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故充分性成立；反之，若 $a\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $a/\!/\beta$ 或 $a\subset\beta$，故必要性不成立. 故选 A.

4. B　$\because \boldsymbol{a}=(2,3),\boldsymbol{b}=(x,5)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(2-x,-2)\cdot(2,3)=4-2x-6=0$，解得 $x=-1$，$\therefore\boldsymbol{b}=(-1,5)$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-2+15}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，故选 B.

5. D　对于 A，$f(x)=x^3-x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数，又 $f'(x)=3x^2-1=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$，$\therefore$ 当 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，不合题意；

对于 B，$f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，且 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数，又 $f(1)=\sin 1$，$f(\pi)=0<f(1)$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不可能单调递增，不合题意；

对于 C，$f(x)=\lg\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数，不合题意；

对于 D，$f(x)=3x-\frac{1}{x}+\sin x$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，且 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数，又 $f'(x)=3+\frac{1}{x^2}+\cos x>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意. 故选 D.

6. C　初始值 $k=1$，$S=1+\log_2 2$，第一次循环 $k=2$，$S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}$，第二次循环 $k=3$，$S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}=3$，退出循环，输出的 S 值为 3. 故选 C.

7. A　依题意，抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，$\because A(4,n)$ 为 C 上一点，且 $|AF|=5$，则 $|AF|=4+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 $C:y^2=4x$，焦点为 $F(1,0)$，$\because A$ 为 C 上一点，则 $n^2=4\times4$，$\therefore n=\pm4$，由抛物线的对称性，不妨取 $A(4,4)$，$\therefore$ 直线 AF 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$，代入 $C:y^2=4x$，得 $\frac{16}{9}(x-1)^2=4x$，整理得 $4x^2-17x+4=0$，解得 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=4$，$\therefore|AB|=\frac{1}{4}+1+5=\frac{25}{4}$，故选 A.

8. A　$\because\frac{a\sin C}{b\cos A+a\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sqrt{3}(b\cos A+a\cos B)=2a\sin C$，$\therefore$ 由正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin B\cos A+\sin A\cos B)=2\sin A\sin C$，$\therefore\sqrt{3}\sin(A+B)=2\sin A\sin C$，$\therefore\sqrt{3}\sin C=$

$2\sin A\sin C$,又 $\sin C\neq0$,$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\because a=\sqrt{3}$,$b=2$,$\therefore$由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=1$,$\therefore B=90^\circ$,$\therefore A=60^\circ$,$C=30^\circ$,$\therefore\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故选 A.

9. C　随机逐个面试共有 A_6^6 种可能的顺序,而任何时候等待面试的男生人数都不多于女生人数的顺序可以分为 5 类:

①男男男女女女,此时有 $A_3^3A_3^3=36$ 种;

②男男女男女女,此时有 $A_3^2A_3^1A_2^2=36$ 种;

③男男女女男女,此时有 $A_3^2A_3^2=36$ 种;

④男女男男女女,此时有 $A_3^1A_3^1A_2^2A_2^2=36$ 种;

⑤男女男女男女,此时有 $A_3^3A_3^3=36$ 种.

故满足条件的面试顺序共有 $36\times5=180$ 种,故选 C.

10. C　如果正整数 a_1 按照上述规则变换后的第 9 项为 1,则逆向推导可得

$$1\to2\to4\to\begin{cases}8\to16\to\begin{cases}32\to64\to\begin{cases}128\to256\\21\to42\end{cases}\\5\to10\to\begin{cases}20\to40\\3\to6\end{cases}\end{cases}\\1\to2\to4\to\begin{cases}8\to16\to\begin{cases}32\\5\end{cases}\\1\to2\to4\end{cases}\end{cases}$$

结合选项可知,a_1 的值不可能是 60,故选 C.

11. B　由题知,$f(0)=2\sin\varphi=1(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$,$\because f(x)\leqslant f(2\pi)$恒成立,$\therefore 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore\omega=\frac{1}{6}+k$,$k\in\mathbf{Z}$. $\because f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,且$\omega>0$,$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant2\times(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\pi$,$\therefore0<\omega\leqslant2$,$\therefore\omega=\frac{1}{6}$或$\frac{7}{6}$,验证知$\omega=\frac{1}{6}$符合题意,$\therefore f(x)=2\sin(\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{6})$,故①错误;将函数 $f(x)$图象的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{3}$倍(纵坐标不变)得到函数 $y=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$的图象,再向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到函数 $g(x)=2\sin(\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$的图象,易知 $g(x)$不是偶函数,所以函数 $g(x)$的图象不关于 y 轴对称,故②错误;当 $x\in(0,\frac{\pi}{3})$时,$\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{9})$,$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$,由正弦函数的单调性可知,此时 $\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})>\sin(\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{6})$,即 $g(x)>f(x)$恒成立,故③正确;$g'(x)=\frac{1}{2}\times2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$,所以 $g'(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{2}=0$,由余弦函数的单调性可知,$g'(x)\geqslant g'(\frac{\pi}{3})$不恒成立,故④错误,故选 B.

12. D　设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,直线 AB:$y=kx+m$,联立$\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,

可得$(b^2-a^2k^2)x^2-2ka^2mx-a^2m^2-a^2b^2=0$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-2a^2km}{a^2k^2-b^2}\\ x_1x_2=\dfrac{a^2m^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}\end{cases}$. ①

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0\end{cases}$，可得$(b^2-a^2k^2)x^2-2ka^2mx-a^2m^2=0$，则$\begin{cases}x_3+x_4=\dfrac{-2a^2km}{a^2k^2-b^2}\\ x_3x_4=\dfrac{a^2m^2}{a^2k^2-b^2}\end{cases}$. ②

因为$\angle AOB=90°$，所以$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，所以$m^2=\dfrac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2-a^2}>0$. ③

因为$m^2>0$，所以$b^2>a^2$，所以$e^2>2$，即得$e>\sqrt{2}$. ④

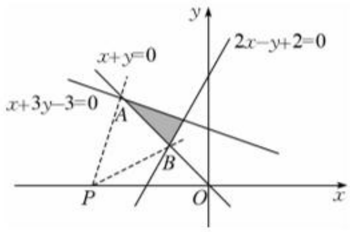
因为$x_3+x_4=x_1+x_2$，所以CD中点为AB的中点，所以$|AC|=|BD|$，

因为$|CD|$是$|AC|$，$|DB|$的等差中项，所以$|AC|=|CD|=|BD|$，又因为A、C、D、B从左到右依次排列，所以$|AB|=3|CD|$，所以$|x_1-x_2|=3|x_3-x_4|$，代入①②③有$k^2=\dfrac{b^2(b^2-9a^2)}{a^2(9b^2-a^2)}$，

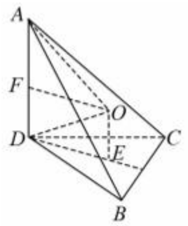
因为$k^2\geqslant0$且$e^2>2$，又因为$b^2>a^2$，则$9b^2>a^2$，所以$b^2\geqslant9a^2$，所以$e^2-1\geqslant9$，即$e\geqslant\sqrt{10}$，综上，$e\geqslant\sqrt{10}$，故选D.

13. 1　由题知，$f(1)=a+b+1=2$，$\therefore a+b=1$　①，切点为$(1,2)$，$\because f'(x)=3ax^2+b+\dfrac{2}{x}$，$\therefore f'(1)=3a+b+2=1$，$\therefore 3a+b=-1$　②，联立①②，得$a=-1$，$b=2$，$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=-1+2=1$.

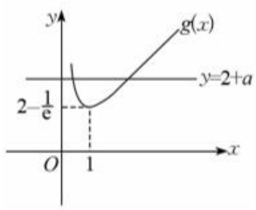
14. $[\dfrac{1}{2},3]$　作出可行域如图中阴影部分所示(包含边界)，$\dfrac{y}{x+2}$的几何意义为可行域内的点与点$P(-2,0)$连线所在直线的斜率，由图知，当直线经过点$A(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$时，$z$取得最大值$z_{\max}=\dfrac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}+2}=3$；当直线经过点$B(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$时，$z$取得最小值$z_{\min}=\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+2}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{y}{x+2}$的取值范围为$[\dfrac{1}{2},3]$.



15. $\dfrac{13\sqrt{13}\pi}{6}$　如图，设三棱锥$A-BCD$的外接球的球心为O，$\triangle BCD$的外心为E，则$OE\perp$平面BCD. 因为$AD\perp$平面BCD，则$OE/\!/AD$. 取AD的中点F，因为$OA=OD$，则$OF\perp AD$，所以$OE=DF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{3}{2}$. $DE=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}=1$. 在$\mathrm{Rt}\triangle OED$中，$DO=\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，所以三棱锥$A-BCD$的外接球的体积为$\dfrac{4\pi}{3}\cdot OD^3=\dfrac{13\sqrt{13}\pi}{6}$.



16. $(-\frac{1}{e},+\infty)$　由 $x^2-(2+a)x+1=\frac{x^2}{e^x}$ 得 $2+a=x-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}$，设 $g(x)=x-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=1-\frac{1-x}{e^x}-\frac{1}{x^2}=\frac{(x^2-1)e^x+x^2(x-1)}{x^2e^x}=\frac{(x-1)[(x+1)e^x+x^2]}{x^2e^x}$，∴当 $x>0$ 时，$(x+1)e^x+x^2>0,x^2e^x>0$，∴当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，∴$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，∴$g(x)_{\min}=g(1)=2-\frac{1}{e}$，由此可得 $g(x)$大致图象如图，∵方程有两个不等的正实根等价于 $y=2+a$ 与 $g(x)$恒有 2 个交点，∴$2+a>2-\frac{1}{e}$，解得 $a>-\frac{1}{e}$，∴实数 a 的取值范围为$(-\frac{1}{e},+\infty)$.



17. 解：(1)设公差为 d.

∵a_1,a_2,a_5 成等比数列，

∴$a_2^2=a_1a_5$，即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

又 $d\neq0$，∴$d=2a_1$.

∵$S_3=3a_2=9$，

∴$a_2=a_1+d=3a_1=3$，∴$a_1=1,d=2$，∴$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1,n\in\mathbf{N}^*$. ………… 6 分

(2)$b_n=a_n\cdot2^{n-1}=n\cdot2^n-2^{n-1}$，………………………………………………………… 7 分

令 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，　①

∴$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$，　② ……………………… 8 分

∴①－②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}=(1-n)\times2^{n+1}-2$，

∴$T_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$，……………………………………………………………… 11 分

∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $(n-1)\times2^{n+1}+2-\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=(n-1)\times2^{n+1}+2-2^n+1=(2n-3)\times2^n+3$. ……………………………………………………………… 12 分

18. (1)证明：∵$SO\perp$底面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，

∴$SO\perp CD$. ……………………………………………………………………………… 1 分

在△ABD 中，$AB=1,AD=3,\cos\angle BAD=\frac{1}{3}$，

由余弦定理得 $\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{9+1-BD^2}{2\times3\times1}=\frac{1}{3}$，

∴$BD=2\sqrt{2}$，

∴$AB^2+BD^2=AD^2$，∴$AB\perp BD$，……………………………………………………… 3 分

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，∴$CD\perp BD$. ……… 4 分

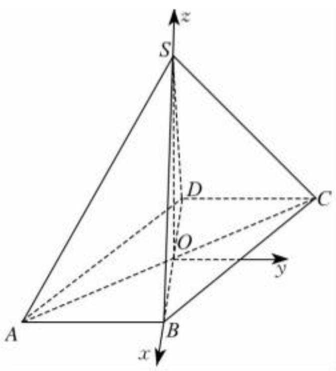
又 $SO\cap BD=O$，∴$CD\perp$平面 SBD，

又 $SD\subset$平面 SBD，∴$CD\perp SD$. ………………………… 6 分

(2)解：以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，$SO=3$，$CD=1$，

则 $O(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$S(0,0,3)$，$C(-\sqrt{2},1,0)$，



$\therefore \overrightarrow{OS}=(0,0,3),\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},1,0),\overrightarrow{SB}=(\sqrt{2},0,-3)$. ………………………………… 8分

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{2}x+y=0,\\ \overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}x-3z=0,\end{cases}$

取 $x=3$,得 $\boldsymbol{n}=(3,6\sqrt{2},\sqrt{2})$. ………………………………………………………………… 10分

易知$\overrightarrow{OS}=(0,0,3)$是平面 BCD 的一个法向量,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{OS},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OS}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OS}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3\times\sqrt{83}}=\dfrac{\sqrt{166}}{83}$, ………………………………………… 11分

易知二面角 $S-BC-D$ 的平面角为锐角,

故二面角 $S-BC-D$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{166}}{83}$. ………………………………………………………… 12分

19. 解:(1)由题意可知,甲答对前2题的概率均为$\dfrac{1}{3}$,

要获得12分,则前2题均要回答正确,

所以甲获得12分的概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$. ………………………………………………………… 3分

(2)乙应前2题均作答. ……………………………………………………………………………… 4分

理由如下:设前2题得分为 X,

若前2题均放弃作答,则 X 的取值为4,所以 $E(X)=4$;……………………………………… 5分

若第1题作答,第2题放弃作答,则 X 的取值为2,7,则

$P(X=2)=\dfrac{1}{2},P(X=7)=\dfrac{1}{2}$,所以 $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}+7\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$; ……………………… 7分

若第2题作答,第1题放弃作答,则 X 的取值为2,7,同理可得 $E(X)=\dfrac{9}{2}$; ………… 8分

若第1题与第2题均作答,则 X 的取值为0,5,10,则

$P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4},P(X=5)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},P(X=10)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$, …… 10分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+5\times\dfrac{1}{2}+10\times\dfrac{1}{4}=5$. ………………………………………… 11分

因为 $5>\dfrac{9}{2}>4$,所以乙应前2题均作答. ………………………………………………… 12分

20. 解:(1)由题知,$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{1}{2}\times 2a\times b=2,\\ \dfrac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ………………………………………… 2分

$\therefore$椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………… 3分

(2)设直线 $l:y=kx+m$,

当 $k=0$ 时,E、F 关于 y 轴对称,满足题意; ………………………………………………… 4分

当 $k\neq 0$ 时,

①当 $m=0$ 时,显然不满足题意;…………………………………………………………………… 5分

②当 $m\neq 0$,即 $mk\neq 0$ 时,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$得$(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$. ………………………………… 6分

∵直线 l 与椭圆 C 有两个交点,

∴$\Delta=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$.

即 $4k^2+1-m^2>0$.(*). ……………………………………………………………………… 7分

设 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,线段 EF 的中点为 H,则 $x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$,

∴$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{-8k^2m}{4k^2+1}+2m=\dfrac{2m}{4k^2+1}$.

∴$H(\dfrac{-4mk}{4k^2+1},\dfrac{m}{4k^2+1})$.

直线 HP 的斜率 $k_{HP}=\dfrac{\dfrac{m}{4k^2+1}-1}{\dfrac{-4mk}{4k^2+1}}=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}$. ……………………………………………… 9分

由$|PE|=|PF|$,得 $HP\perp EF$,

∴$k_{HP}\cdot k=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}\cdot k=-1$,

解得 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$. ………………………………………………………………………… 10分

将 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$代入到(*)中,得 $4k^2+1-\dfrac{(4k^2+1)^2}{9}>0$,

即$\dfrac{(4k^2+1)(8-4k^2)}{9}>0$,

∴$8-4k^2>0$,解得$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$,且 $k\neq0$. ……………………………………………… 11分

综上所述,实数 k 的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……………………………………………… 12分

21.解:(1)当 $m=1$ 时,$f(x)=x^2-2x+\ln x+\dfrac{1}{x}(m\in\mathbf{R})$.

其定义域为$\{x|x>0\}$,

$f'(x)=2x-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2(x-1)+(x-1)}{x^2}=\dfrac{(2x^2+1)(x-1)}{x^2}$, ……………………… 1分

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,此时 $f(x)$单调递增;

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,此时 $f(x)$单调递减;

综上,函数 $f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(0,1)$. ………………… 3分

(2)$g(x)=f(x)-(x-1)^2=m\ln x+\dfrac{1}{x}-1$,

由 $g(x_1)=g(x_2)$,得 $m\ln x_1+\dfrac{1}{x_1}-1=m\ln x_2+\dfrac{1}{x_2}-1$,

即 $m\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=0$,

将 $x_1+x_2=2$ 代入得 $m\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1+x_2}{2x_2}-\dfrac{x_1+x_2}{2x_1}=0$,

即 $m\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{2x_2}-\dfrac{x_2}{2x_1}=0$. ……………………………………………………………… 5分

设 $0<x_1<x_2$,令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$,$t>1$,$\varphi(t)=m\ln t+\dfrac{1}{2t}-\dfrac{t}{2}$,

转化为函数 $\varphi(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有零点，

$\varphi'(t)=\frac{m}{t}-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}=\frac{-t^2+2mt-1}{2t^2}$，其中 $\varphi'(1)=m-1$，

函数 $y=-t^2+2mt-1$ 的对称轴方程为 $t=m$，

若 $m\leqslant 1$，则 $\varphi'(t)<0$ 恒成立，$\varphi(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为减函数，

又 $\varphi(1)=0$，则 $\varphi(t)<0$，

$\therefore\varphi(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上无零点；………………………………………… 7 分

若 $m>1$，则 $\varphi'(t)=0$ 有两个不等正实数根 t_1 和 t_2，

设 $t_1<t_2$，由 $t_1t_2=1$，得 $0<t_1<1<t_2$，

$\therefore$ 在 $(1,t_2)$ 上，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增，

在 $(t_2,+\infty)$ 上，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减，

又 $\varphi(1)=0$，得 $\varphi(t_2)>\varphi(1)=0$. ………………………………………… 8 分

下面证明函数 $\varphi(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点，

考虑到 $\varphi(t)=m\ln t+\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}$ 中含参数 m，

取 $t=e^{2m}(m>1)$，

则 $\varphi(e^{2m})=m\ln e^{2m}+\frac{1}{2e^{2m}}-\frac{e^{2m}}{2}=2m^2+\frac{1}{2e^{2m}}-\frac{e^{2m}}{2}$，

当 $m>1$ 时，$\frac{1}{2e^{2m}}<\frac{1}{2e^2}<\frac{1}{2}$，则 $\varphi(e^{2m})<2m^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2m}}{2}$，

令 $u(m)=2m^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2m}}{2}$，则 $u'(m)=4m-e^{2m}$，

令 $h(m)=4m-e^{2m}$，

当 $m>1$ 时，$h'(m)=4-2e^{2m}<4-2e^2<0$，

$\therefore$ 函数 $h(m)$ 在 $m>1$ 时为减函数，

$\because u'(1)=4-e^2<0$，$\therefore u'(m)<0$ 恒成立，

$u(m)=2m^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2m}}{2}$ 为 $(1,+\infty)$ 上的减函数，

$\therefore\varphi(e^{2m})<u(m)<u(1)=2+\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}=\frac{5-e^2}{2}<0$，

又 $\varphi(t_2)>0$，$\therefore\varphi(t_2)\varphi(e^{2m})<0$，

$\therefore$ 函数 $\varphi(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点. ………………………………… 11 分

综上所述，实数 m 的取值范围为 $(1,+\infty)$. …………………………………………… 12 分

22. 解：(1)将曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)消去参数 θ，

得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2=3$. ……………………………………………… 2 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sin\theta+\cos\theta}$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-4=0$，

又 $\rho\sin\theta=y$，$\rho\cos\theta=x$，

得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，圆 C_1 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 $\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 O 到直线 C_2 的距离为 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>\sqrt{3}$，

$\therefore$ 直线 C_2 与圆 C_1 相离. ……………………………………………………… 7 分

又点 P 是圆 C_1 上一点，

∴点 P 到直线 C_2 的距离的取值范围为$[2\sqrt{2}-\sqrt{3},2\sqrt{2}+\sqrt{3}]$. ………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|2x-1|-|x-1|=\begin{cases}-x, x\leqslant\frac{1}{2}\\ 3x-2, \frac{1}{2}<x\leqslant 1\\ x, x>1\end{cases}$ ………………………………… 2 分

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$时，由 $-x<1$ 解得 $x>-1$，∴ $-1<x\leqslant\frac{1}{2}$；

当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，由 $3x-2<1$ 解得 $x<1$，∴$\frac{1}{2}<x<1$；

当 $x>1$ 时，$x<1$，无解，

综上所述，不等式 $f(x)<1$ 的解集为$\{x|-1<x<1\}$. ………………………………… 5 分

(2)由(1)知，函数 $f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{2}]$上单调递减，在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递增，

∴$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，………………………………………………………… 6 分

∵正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$，

∴$a+b=1(a>0,b>0)$，…………………………………………………………………… 7 分

∴$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{2a+2b}{b}=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}-1,b=2-\sqrt{2}$时取等号，

∴$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的取值范围为$[3+2\sqrt{2},+\infty)$. ……………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。