2022～2023 学年度下期高二年级期末联考
理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1～5：DABBC　　6～10：DCDDB　　11～12：CB

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．3　　14．10π　　15．$a=1$ 或 $a\leqslant 0$　　16．2

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）易得 $f'(x)=x^2-2ax-3$，　　……2 分

$\because f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=\dfrac{1}{4}x+1$ 垂直，

$\therefore f'(1)=-4$，　　……5 分

即 $1-2a-3=-4$，

解得 $a=1$；　　……6 分

（2）易得 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，　　……7 分

由 $f'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>3$，　　……9 分

由 $f'(x)<0$ 得 $-1<x<3$，　　……11 分

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$，

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,3)$．　　……12 分

18．（12 分）

解：（1）依题意有：$(0.005+0.010+0.020+0.030+a+0.010)\times 10=1$，　　……2 分

解得 $a=0.025$，　　……3 分

易得不及格的频率为：$0.05+0.1=0.15$，　　……5 分

$\therefore$ 估计本次物理测试的及格率为：0.85；　　……6 分

（2）易知这 100 名学生中成绩不及格的共 15 人，

成绩在 $[40,50)$ 内的有 5 人，成绩在 $[50,60)$ 内的有 10 人，　　……7 分

$\therefore$ 采用分层抽样抽取的 6 名学生中，成绩在 $[40,50)$ 内的有 2 人，在 $[50,60)$ 内的有 4 人，分别记这 6 人为 a，b，1，2，3，4，记 2 名面对面交流学生的成绩均来自 $[50,60)$ 为事件 A，

$\therefore$ 基本事件有：(a,b)，$(a,1)$，$(a,2)$，$(a,3)$，$(a,4)$，$(b,1)$，$(b,2)$，$(b,3)$，$(b,4)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$ 共 15 个，　　……9 分

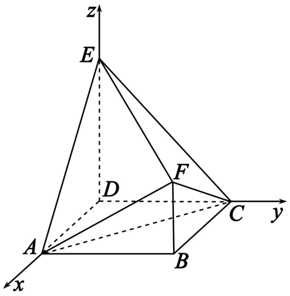
事件 A 包含 6 个基本事件，　　……10 分

$\therefore P(A)=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$，　　……11 分

即 2 名面对面交流学生的成绩均来自 $[50,60)$ 的概率为 $\dfrac{2}{5}$．　　……12 分

19.（12 分）

解：（1）由题易知 DA，DC，DE 两两垂直，建立空间直角坐标系如图， ……………………………1 分



可得 $A(2,0,0)$， $C(0,2,0)$， $E(0,0,2)$， $F(2,2,1)$， ……………………………2 分

可得 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{EF}=(2,2,-1)$， ……………………………3 分

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=-2\times2+2\times2+0=0$， ……………………………4 分

$\therefore \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{EF}$， 即 $AC\perp EF$； ……………………………5 分

（2）设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{AE}=(-2,0,2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\ -2x+2z=0\end{cases}$，

不妨设 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$， ……………………………7 分

同理可得平面 FEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-2,-2)$， ……………………………9 分

由 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-3}{3\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………………11 分

$\therefore$ 二面角 $A-EC-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ……………………………12 分

20.（12 分）

解：（1）$\because a=0$ 时， $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，

有 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$， ……………………………1 分

由 $f'(x)>0\Rightarrow x>1$，$f'(x)<0\Rightarrow x<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 为减函数，在 $(1,+\infty)$ 为增函数， ……………………………2 分

有 $f(x)_{\min}=f(1)=-\mathrm{e}$， ……………………………3 分

$\therefore f(x)+\mathrm{e}\geqslant0$ 成立； ……………………………4 分

（2）易得 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2ax+2a$，

即 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2a)$， ……………………………5 分

①当 $2a\leqslant0$ 时，即 $a\leqslant0$ 时，

$\mathrm{e}^x-2a>0$ 恒成立，

由 $f'(x)>0\Rightarrow x>1$，$f'(x)<0\Rightarrow x<1$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 为减函数，在 $(1,+\infty)$ 为增函数，

此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点； ……………………………6 分

②当 $2a=\mathrm{e}$ 时，即 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，无极值； ……………………………7 分

③当 $0<2a<\mathrm{e}$ 时，即 $0<a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

由 $f'(x)>0\Rightarrow x<\ln 2a$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Rightarrow \ln 2a<x<1$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$，$(1,+\infty)$ 为增函数，在 $(\ln 2a,1)$ 为减函数，

此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点； ……………………………9 分

④当 $2a>\mathrm{e}$ 时，即 $a>\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

由 $f'(x)>0\Rightarrow x<1$ 或 $x>\ln 2a$，$f'(x)<0\Rightarrow 1<x<\ln 2a$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(\ln 2a,+\infty)$ 为增函数，在 $(1,\ln 2a)$ 为减函数，

此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点， ……………………………11 分

综上所述：实数 a 的取值范围为 $(\dfrac{\mathrm{e}}{2},+\infty)$， ……………………………12 分

（注：第二问，如果说清楚，利用 $f''(1)<0$ 求得实数 a 的取值范围也可）

21．（12 分）

解：（1）易知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为 $(2,0)$， ……………………………1 分

由题意知 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ c=2\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$， ……………………………2 分

又 $a>b>0$，解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=2\end{cases}$， ……………………………3 分

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$； ……………………………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$，

$\therefore \Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)>0$，即 $8k^2-m^2+4>0$，

有 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}$， ……………………………5 分

$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$，

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=-1$，

$\therefore \dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}+\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=-1$，$\therefore 3m^2-6k^2-7=0$，即 $m^2=\dfrac{6k^2+7}{3}$， ……………………………7 分

此时 $\Delta>0$ 恒成立，

$\because$ 点 P 在以 AB 为直径的圆上，易得 $\triangle PAB$ 面积最大值为：$S=\dfrac{|AB|^2}{4}$，

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\Delta}}{1+2k^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{8k^2-m^2+4}}{1+2k^2}$， ……………………………8 分

将 $m^2=\dfrac{6k^2+7}{3}$ 代入上式，得

$|AB|^2=\dfrac{8(1+k^2)}{(1+2k^2)^2}\times(8k^2-\dfrac{6k^2+7}{3}+4)=\dfrac{8(1+k^2)(5+18k^2)}{3(1+2k^2)^2}$， ……………………………9 分

令 $1+2k^2=t$，则 $t\geqslant 1$，

$\therefore |AB|^2=\dfrac{4(t+1)(9t-4)}{3t^2}=\dfrac{4(9t^2+5t-4)}{3t^2}=-\dfrac{16}{3}(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{t}-\dfrac{9}{4})=-\dfrac{16}{3}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{5}{8})^2+\dfrac{169}{12}\leqslant\dfrac{169}{12}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{8}$，即 $k^2=\dfrac{3}{10}$ 时等号成立， ……………………………11 分

$\therefore \triangle PAB$ 的面积 $S\leqslant\dfrac{169}{48}$，

$\therefore \triangle PAB$ 面积的最大值是 $\dfrac{169}{48}$． ……………………………12 分

22．（10 分）

解：（1）由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

得曲线 C 是以 $(1,1)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$， ……………………………2 分

易得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）； ……………………………4 分

（2）将直线 l 的参数方程代入 $x^2+y^2-2x-2y=0$，

可得 $t^2\cos^2\alpha+(1+t\sin\alpha)^2-2t\cos\alpha-2(1+t\sin\alpha)$，

整理得 $t^2-2t\cos\alpha-1=0$， ……………………………5 分

设 A，B 两点所对的参数为 t_1，t_2，

有 $t_1+t_2=2\cos\alpha$，$t_1t_2=-1$， ……………………………6 分

$$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}$$

$$=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}，$$

$$=\sqrt{4\cos^2\alpha+4}，$$ ……………………………8 分

由题设有 $4\cos^2\alpha+4=5$，

$\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$， ……………………………9 分

又直线 l 的倾斜角 $\alpha\in[0,\pi)$，

$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 直线 l 的倾斜角 α 为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$． ……………………………10 分

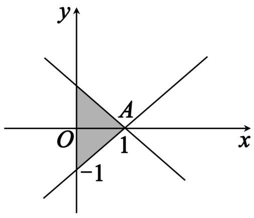
解析：

1．解：由题意可知 $A\cup B=(-2,+\infty)$，故选：D．

2．解：$\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，故选：A．

3．解：根据全称命题与特称命题之间的关系，可得：命题“$\forall x>0$，$\sqrt{x}\geqslant 0$”的否定是“$\exists x>0$，$\sqrt{x}<0$”，故选：B．

4．解：画出可行域如图，平移直线 $y=2x$，可知 $A(1,0)$ 为最优解，$\therefore x=1$，$y=0$ 时，$z_{\min}=-2$，故选：B．



5．解：由题可得 $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=3\\ 2a=2\end{cases}$，解得 $a=1$，$b=3$，$\therefore$ 双曲线的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$，故选：C．

6．解：$f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$\because f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，故选：D．

7．解：$\because a=\log_{\frac{1}{2}}3<0$，$0<c=\ln 2<\ln \mathrm{e}=1$，$b=\mathrm{e}^{0.5}>\mathrm{e}^0=1$，$\therefore b>c>a$，故选：C．

8．解：根据几何概型：$P=\dfrac{60\times 52-\frac{1}{2}\times 20\times 44\times 2}{60\times 52}=\dfrac{28}{39}$，故选：D．

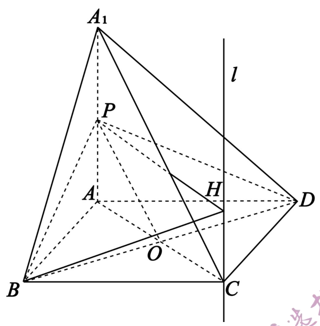
9．解：若数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数和方差分别为 $\bar{x}$ 和 s^2，则数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的平均数和方差分别为 $a\bar{x}+b$ 和 a^2s^2，故选：D．

10．解：$\because$ 当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_3 x$ 有一零点 $x=1$，要使函数有两个零点，则当 $x\leqslant 0$ 时必有一个零点，即 $a-2^x=0$ 有一个非正数解，即 $a=2^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上有解，$\therefore a\in(0,1]$，又 $\because (0,1]\subsetneqq(0,+\infty)$，$\therefore$“函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x，x>0\\ a-2^x，x\leqslant 0\end{cases}$ 有且只有两个零点”是“$a>0$”的充分不必要条件，故选：B．

11．解：$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c^2$，则 $|y_P|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，不妨令 $P(x_0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)$，代入 $y=\dfrac{b}{a}x$，得 $x_0=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2b}$，即 $P(\dfrac{\sqrt{3}ac}{2b},\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)$，$\because \overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_2P}$，$\therefore \overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，即 $(\dfrac{\sqrt{3}ac}{2b}+c,\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)\cdot(\dfrac{\sqrt{3}ac}{2b}-c,\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)=0$，$\therefore \dfrac{3a^2c^2}{4b^2}-c^2+\dfrac{3}{4}c^2=0$，即 $b^2=3a^2$，$\therefore e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$，故选：C．

（**另解：**过点 P 作 $PA\perp x$ 轴，$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}\times 2c\times|PA|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c^2$，$\therefore |PA|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，$\because F_1P\perp F_2P$，$\therefore |OP|=c$，$\therefore \angle POA=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$）

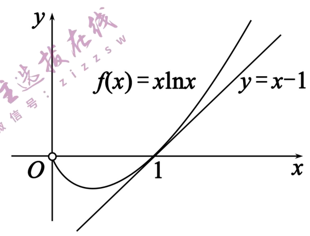
12．解：如图所示，连接 AC，BD 交于点 O，则 O 为 AC 的中点，又 $\because A_1C \parallel$ 平面 PBD，$PO\subset$ 平面 PBD，$\therefore A_1C\parallel PO$，可得 P 为 AA' 的中点，又由 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore OB=\dfrac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$，$\therefore OA=2$，$\therefore CB=CA=CD=4$，$\therefore$ 三棱锥外接球的球心在过点 C 且垂直于面 $ABCD$ 的直线 l 上，设球心为 H，半径为 R，$\therefore BH^2=PH^2=R^2$，设 $CH=x$，$\therefore BC^2+CH^2=(PA-CH)^2+AC^2$，即 $16+x^2=(2-x)^2+16$，解得 $x=1$，$\therefore R=\sqrt{17}$，$\therefore$ 该球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{68\sqrt{17}}{3}\pi$，故选：B．



13．解：$\because \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore (2-k)(-6)=6$，解得 $k=3$，故答案为 3．

14．解：$x^2+y^2-2x-6y=0$，即 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$，$\therefore$ 圆半径为 $r=\sqrt{10}$，$\therefore$ 圆的面积为 10π，故答案为 10π．

15．解：令 $f(x)=x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\ln x+1$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x=1$ 时，$f(x)=0$，当 x 趋向正无穷时，$f(x)$ 趋向正无穷，故作出 $y=f(x)$ 的大致图象，如图所示．由题知方程 $x\ln x-a(x-1)=0$ 恰有一个实数根，即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a(x-1)$ 的图象恰有一个公共点，易知点 $(1,0)$ 为 $y=f(x)$ 与直线 $y=a(x-1)$ 的公共点，又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$，$\therefore a=1$，显然 $a\leqslant 0$ 也成立，故答案为 $a=1$ 或 $a\leqslant 0$．



16．解：设 $B(x_1,y_1)$，则椭圆 C 在点 B 处的切线方程为 $\dfrac{x_1}{4}x+y_1y=1$，令 $x=0$，$y_N=\dfrac{1}{y_1}$，令 $y=0$，可得 $x_M=\dfrac{4}{x_1}$，$\therefore S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{y_1}\cdot\dfrac{4}{x_1}$，又点 B 在椭圆的第一象限上，$\therefore x_1$，$y_1>0$，$\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$，即有 $\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1\geqslant x_1y_1$，$\therefore\dfrac{1}{x_1y_1}\geqslant 1$，$S_{\triangle OMN}\geqslant 2$，当且仅当 $\dfrac{{x_1}^2}{4}={y_1}^2=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，$\therefore$ 当 $B(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$\triangle OMN$ 的面积有最小值，最小值为 2，故答案为 2．