

临沂市 2020 级普通高中学科素养水平监测考试

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.A 2.B 3.C 4.D 5.D 6.D 7.B 8.C

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.AC 10.ACD 11.BCD 12.ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.6 14.-2 15. $\frac{1}{22}$  16.3

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.解: $y=2x+\ln x$  的导数为  $y'=2+\frac{1}{x}$ , ..... 1 分

$x=1, y'=3$ , ..... 2 分

曲线  $y=2x+\ln x$  在  $(1,2)$  处的切线为  $y=3x-1$ . ..... 3 分

$\therefore$  切线与曲线  $y=ax^2+(2a+3)x+1$  只有一个公共点,

故将两式联立,因只有一个公共点,

①当  $a=0$  时,  $y=3x+1$  与  $y=3x-1$  平行,无公共点; ..... 5 分

②当  $a \neq 0$  时,  $ax^2+(2a+3)x+1=3x-1$ ,

即  $ax^2+2ax+2=0$ . ..... 6 分

由题意知  $\Delta=(2a)^2-4a \cdot 2=0$ , ..... 8 分

解得  $a=2$ . 综上  $a=2$ . ..... 10 分

18.解:(1)  $\chi^2 = \frac{50(200-100)^2}{30 \times 20 \times 30 \times 20} \approx 1.4 < 6.635$ , ..... 3 分

故性别对关注冰雪运动没有明显影响. .... 4 分

(2)  $X$  的所有可能取值为:0,1,2,3.

$P(X=0) = \frac{C_3^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}$  ..... 5分

$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$  ..... 6分

$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$  ..... 7分

$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$  ..... 8分

分布列为:

$X$	0	1	2	3	..... 10分
	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	

数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$  ..... 12分

解 (1) 由  $\bar{x} = 9.97, s \approx 0.212$ , 得  $\mu$  的估计值为  $\hat{\mu} = 9.97, \sigma$  的估计值为  $\hat{\sigma} = 0.212$ , 由样本数据可以看出一个零件的尺寸 9.22 在  $(9.334, 10.606)$  之外, 因此需对当天的生产过程进行检查 ..... 3分

(2) 设“在一次检测中, 发现需要对本次的生产过程进行检查”为事件 A, ..... 4分

则  $P(A) = 1 - [P(X=0)]^{16} = 1 - (0.9974)^{16} = 1 - 0.9592 = 0.0408$ , ..... 8分

由题意, 需对生产设备进行检修的概率为

$P = 1 - C_4^0 [1 - P(A)]^4 - C_4^1 P(A) \cdot [1 - P(A)]^3 \approx 1 - 0.9592^4 - 4 \times 0.0408 \times 0.9592^3 \approx 0.0095 \approx 0.01$ .

..... 11分

即该天需对生产设备进行检修的概率为 0.01. .... 12分

20. 解: (1) 由散点图可知,  $D = a_2 + b_2 \lg I$  更适合; ..... 2分

(2) 令  $W_i = \lg I_i, W = \lg I$ , 则  $D = a_2 + b_2 W$ , ..... 3分

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (W_i - \bar{W})(D_i - \bar{D})}{\sum_{i=1}^{10} (W_i - \bar{W})^2} = \frac{7.4}{1.48} = 5$$
 ..... 5分

$\hat{a}_2 = \bar{D} - \hat{b}_2 \bar{W} = 36.7 - 5 \times (-11.4) = 93.7$  ..... 6分

即 D 关于 W 的回归方程是  $D = 93.7 + 5W$ ,

则 D 关于 I 的非线性经验回归方程是  $D = 93.7 + 5 \lg I$ . ..... 7分

(3) 设点 F 处的声音能量为 I, 则  $I = I_0 + I_1$ .

因为  $I_a > 0, I_b > 0, \frac{1}{I_a} + \frac{9}{I_b} = 10^{10}$ ,  
 所以  $I = I_a + I_b = 10^{-10} \left( \frac{1}{I_a} + \frac{9}{I_b} \right) (I_a + I_b)$  ..... 10分  
 $= 10^{-10} \left( 10 + \frac{I_b + 9I_a}{I_b} \right) \geq 10^{-10} \left( 10 + 2\sqrt{\frac{I_b}{I_a} \cdot \frac{9I_a}{I_b}} \right) = 16 \times 10^{-10}$ , ..... 10分  
 当且仅当  $I_b = 3I_a$ , 即  $I_a = \frac{4}{10^{10}}, I_b = \frac{12}{10^{10}}$  时等号成立, ..... 11分

所以  $D = 93.7 + 51 \lg I \geq 93.7 + 51 \lg (16 \times 10^{-10}) = 43.7 + 20 \lg 2 \approx 49.7 > 45$ .  
 所以点  $P$  处会受到噪声污染. .... 12分

21. 解: (1) 设  $A$  类服装、 $B$  类服装的单件收益分别为  $X_1$  元,  $X_2$  元, 则

$E(X_1) = 0.4 \times 200 + 0.5 \times 200 \times 0.85 + 0.1 \times 200 \times 0.6 - 120 = 57$ , ..... 2分

$E(X_2) = 0.2 \times 300 + 0.4 \times 300 \times 0.75 + 0.4 \times 300 \times 0.6 - 160 = 62$ ,

$E(X_1) < E(X_2)$ , 故  $B$  类服装单件收益的均值更高. .... 4分

(2) 由题意可知,  $X \sim B(5, \frac{3}{4})$ ,  $\therefore E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ , ..... 6分

$\therefore Y = (200 \times 0.85 - 120)(5 - X) + (300 \times 0.75 - 160)X = 250 + 15X$  (元), ..... 7分

$\therefore E(Y) = E(250 + 15X) = 250 + 15E(X) = 306.25$  (元). .... 8分

又  $\therefore P(X=0) = (\frac{1}{4})^5 = \frac{1}{1024}, P(X=1) = C_5^1 (\frac{3}{4})^4 (\frac{1}{4}) = \frac{15}{1024}$ ,

$P(X=2) = C_5^2 (\frac{3}{4})^3 (\frac{1}{4})^2 = \frac{90}{1024}, P(X=3) = C_5^3 (\frac{3}{4})^2 (\frac{1}{4})^3 = \frac{270}{1024}$ ,

$P(X=4) = C_5^4 (\frac{3}{4}) (\frac{1}{4})^4 = \frac{405}{1024}$ . ..... 10分

$\therefore P(X < 4) = \frac{1+15+90+270}{1024} = \frac{376}{1024} < 0.5, P(X < 5) = \frac{1+15+90+270+405}{1024} = \frac{781}{1024} > 0.5$ ,  
 ..... 11分

$\therefore$  当  $P(X < n) \leq 0.5 (n \in \mathbb{N})$  时,  $n$  可取的最大值为 4.

综上,  $E(Y) = 306.25$  (元),  $n$  的最大值为 4. .... 12分

22. 解: (1)  $f'(x) = \frac{e^x + e^x(a-1-x)}{(e^x)^2} = \frac{a-x}{e^x}$  ..... 1分

当  $a \leq 0$  时  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减; ..... 2分

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = \frac{1}{e^x}(a-x) = 0$ , 得  $x = a$ , ..... 3分

当  $x \in (0, a)$  时  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (a, +\infty)$  时  $f'(x) < 0$ .

所以  $f(x)$  在  $(0, a)$  上单调递增, 在  $(a, +\infty)$  单调递减. .... 4分

(2) 因为对任意的  $x > 0$ , 不等式  $g(x) \leq e^x$  恒成立,

即  $\frac{\ln x + 1 - xe^x}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, .... 5分

令  $F(x) = \frac{\ln x + 1 - xe^x}{x}$  ( $x > 0$ ), 则  $F'(x) = \frac{-x^2 e^x - \ln x}{x^2}$ , .... 6分

令  $h(x) = -x^2 e^x - \ln x$ , 则  $h'(x) = -(x^2 + 2x)e^x - \frac{1}{x} < 0$ , .... 7分

所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数,

又因为  $h(1) = -e < 0$ ,  $h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} + 1 = -e^{\frac{1}{e^2}-2} + 1 > 0$ , .... 8分

所以  $\exists x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ , 使得  $h(x_0) = 0$ , 即  $-x_0^2 e^{x_0} - \ln x_0 = 0$ .

当  $0 < x < x_0$  时,  $h(x) > 0$ , 可得  $F'(x) > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增;

当  $x > x_0$  时,  $h(x) < 0$ , 可得  $F'(x) < 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,

所以  $F(x)_{\max} = F(x_0) = \frac{\ln x_0 + 1 - x_0 e^{x_0}}{x_0}$ , .... 9分

由  $-x_0^2 e^{x_0} - \ln x_0 = 0$ , 可得  $x_0^{x_0} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = (\ln \frac{1}{x_0}) e^{\ln \frac{1}{x_0}}$ ,

令  $t(x) = x e^x$ , 则  $t(x_0) = x_0 (\ln \frac{1}{x_0})$ , .... 10分

因为  $t'(x) = (x+1)e^x > 0$ , 所以  $t(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $\ln x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$ , 可得  $\ln x_0 = -x_0$ , 所以  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , 即  $x_0 e^{x_0} = 1$ ,

所以  $F(x)_{\max} = F(x_0) = \frac{\ln x_0 + 1 - x_0 e^{x_0}}{x_0} = \frac{-x_0 + 1 - 1}{x_0} = -1$ , 所以  $a \geq -1$ , .... 11分

综上所述,  $a$  的取值范围是  $[-1, +\infty)$ . .... 12分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线