树德中学高2021级高三上学期10月阶段性测试数学(文科)试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	C	D	B	B	C	C	D	B	B

13.-7　　14. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　15.9　　16.$\left[-\frac{2}{e},0\right)$.

17. (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,设公差为 d,

则 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=25$,所以 $a_3=5$,又 $a_2=3$,所以 $\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+d=3\end{cases}$,解得 $a_1=1$, $d=2$.

则 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.……………………………………6 分

(2) 由 (1) 知,$b_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

所以 $b_n=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$T_n=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$ ………………12 分

18. (1) 连 A_1C, A_1E,因为 M,N 分别为棱 AC,AA_1 的中点,所以 $A_1C\,/\!/\,MN$,

所以 $\angle A_1CE$(或其补角) 是异面直线 MN 和 CE 所成的角,

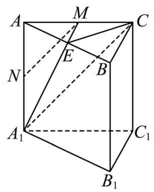
因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中各条棱长均为 2,

点 M,N,E 分别为棱 AC,AA_1,AB 的中点.

所以 $CE=\sqrt{3}$, $A_1E=\sqrt{5}$, $A_1C=2\sqrt{2}$,

因为 $CE^2+A_1E^2=A_1C^2$,所以 $CE\perp A_1E$,

所以 $\tan\angle A_1CE=\frac{A_1E}{CE}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ……………………6 分



(2) 连 BN,BM,

依题意可得 $S_{\triangle MBE}=\frac{1}{2}S_{\triangle MAB}=\frac{1}{4}S_{\triangle CAB}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$MN=NE=\sqrt{2}$, $ME=\frac{1}{2}BC=1$,

$S_{\triangle MNE}=\frac{1}{2}\cdot ME\cdot\sqrt{MN^2-\left(\frac{ME}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

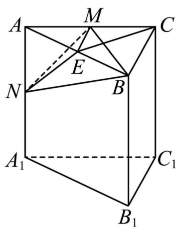
设点 B 到平面 MEN 的距离为 d,

由 $V_{B-MNE}=V_{N-MBE}$ 得 $\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle MNE}=\frac{1}{3}\cdot NA\cdot S_{\triangle MBE}$,

得 $\frac{1}{3}d\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$,

得 $d=\frac{\sqrt{21}}{7}$. 即点 B 到平面 MEN 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

……………………………………………………12 分



19. (1) 商店的日利润 y 关于需求量 x 的函数表达式为:

$y=\begin{cases}50\times14+30\times(x-14), & 14\leqslant x\leqslant20\\50x-10\times(14-x), & 10\leqslant x<14\end{cases}$,化简得: $y=\begin{cases}30x+280, & 14\leqslant x\leqslant20\\60x-140, & 10\leqslant x<14\end{cases}$ …………………4 分

(2) ①由频率分布直方图得:

海鲜需求量在区间 $[10,12)$ 的频率是 $2\times0.08=0.16$;

海鲜需求量在区间 $[12,14)$ 的频率是 $2\times0.12=0.24$;

海鲜需求量在区间 $[14,16)$ 的频率是 $2\times0.15=0.30$;

海鲜需求量在区间 $[16,18)$ 的频率是 $2\times0.10=0.20$;

海鲜需求量在区间 $[18,20]$ 的频率是 $2\times0.05=0.10$;

这 5050 天商店销售该海鲜日利润 y 的平均数为:

$(11\times60-14\times10)\times0.16+(13\times60-14\times10)\times0.24+(15\times30+20\times14)\times0.30+(17\times30+20\times14)$
$\times0.20+(19\times30+20\times14)\times0.10=83.2+153.6+219+158+85=698.8$(元)

②由于 $x=14$ 时, $30\times14+280=60\times14-140=700$

显然 $y=\begin{cases}30x+280, & 14\leqslant x\leqslant20\\60x-140, & 10\leqslant x<14\end{cases}$ 在区间 $[10,20]$ 上单调递增,

$y=580=60x-140$,得 $x=12$;　　$y=760=30x+280$,得 $x=16$;

日利润 y 在区间 $[580,760]$ 内的概率即求海鲜需求量 x 在区间 $[12,16]$ 的频率: $0.24+0.30=0.54$

……………………………………………………………………12 分

20. (1) 由已知: $C_2(4,0)$; C_1 的准线为 $x=-\frac{1}{4}$.

圆心 C_2 到 C_1 准线距离为 $4-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{4}$; ……………………………………4 分

(2) 设 $P(y_0^2,y_0)$, $A(y_1^2,y_1)$, $B(y_2^2,y_2)$, 切线 PA:$x-y_0^2=m_1(y-y_0)$

由 $\begin{cases}x=m_1y+y_0^2-m_1y_0\\y^2=x\end{cases}$ 得: $y^2-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$

由 $y_0+y_1=m_1$ 得: $y_1=m_1-y_0$,

切线 PB:$x-y_0^2=m_2(y-y_0)$, 同理可得: $y_2=m_2-y_0$

依题意: $C_2(4,0)$ 到 PA:$x-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$ 距离 $\frac{|4-y_0^2+m_1y_0|}{\sqrt{m_1^2+1}}=1$

整理得: $(y_0^2-1)m_1^2+(8y_0-2y_0^3)m_1+y_0^4-8y_0^2+15=0$

同理: $(y_0^2-1)m_2^2+(8y_0-2y_0^3)m_2+y_0^4-8y_0^2+15=0$

$\therefore m_1+m_2=\frac{2y_0^3-8y_0}{y_0^2-1}(y_0^2\neq1)$

$\because k_1=\frac{y_0}{y_0^2-4}$, $k_2=\frac{y_1-y_2}{y_1^2-y_2^2}=\frac{1}{y_1+y_2}=\frac{1}{m_1+m_2-2y_0}=\frac{y_0^2-1}{-6y_0}$

$\therefore k_1k_2=\frac{y_0}{y_0^2-4}\cdot\frac{y_0^2-1}{-6y_0}=-\frac{5}{24}$, 解得: $y_0=\pm4$

故所求 P 点坐标为 $(16,4)$ 或 $(16,-4)$. ……………………………………12 分

21. (1)$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，$f'(x)=x+\frac{a}{x}-(a+1)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，

①$a\leqslant 0$时，$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$的减区间$(0,1)$，增区间是$(1,+\infty)$；

②$0<a<1$时，$0<x<a$或$x>1$时，$f'(x)>0$，$a<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$的增区间是$(0,a)$和$(1,+\infty)$，减区间是$(a,1)$；

③$a=1$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立，$f(x)$的增区间是$(0,+\infty)$，无减区间；

④$a>1$时，$0<x<1$或$x>a$时，$f'(x)>0$，$1<x<a$时，$f'(x)<0$，$f(x)$的增区间是$(0,1)$和$(a,+\infty)$，减区间是$(1,a)$；

综上，①$a\leqslant 0$时，$f(x)$的减区间$(0,1)$，增区间是$(1,+\infty)$；

②$0<a<1$时，$f(x)$的增区间是$(0,a)$和$(1,+\infty)$，减区间是$(a,1)$；

③$a=1$时，$f(x)$的增区间是$(0,+\infty)$，无减区间；

④$a>1$时，$f(x)$的增区间是$(0,1)$和$(a,+\infty)$，减区间是$(1,a)$.……………………6分

(2)$F'(x)=f'(x)+a-1=\frac{x^2-2x+a}{x}$，由题意$x^2-2x+a=0$有两个不等正根$x_1,x_2$，

$\Delta=4-4a>0$，$a<1$，又$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=a>0$，所以$0<a<1$，

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x-2x$，

$F(x_1)+F(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+a\ln x_1-2x_1+\frac{1}{2}x_2^2+a\ln x_2-2x_2$

$=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+a\ln(x_1x_2)-2(x_1+x_2)=2-a+a\ln a-4=a\ln a-a-2$，

由题意$a\ln a-a-2>-\frac{2}{e}-2$，$a\ln a-a+\frac{2}{e}>0$，

设$g(x)=x\ln x-x+\frac{2}{e}(0<x<1)$，则$g'(x)=\ln x+1-1=\ln x<0$，

$g(x)$在$(0,1)$上递减，又$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+\frac{2}{e}=0$，所以由$a\ln a-a+\frac{2}{e}>0$，得$0<a<\frac{1}{e}$.

综上，实数a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{e}\right)$. ……………………12分

22. (1) 由直线l的参数方程$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，得其普通方程为$y=x+2$，

$\therefore$直线l的极坐标方程为$\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$.

又$\because$圆C的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入并化简得$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$，$\therefore$圆$C$的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$.…………5分

(2) 将直线l：$\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$，与圆$C$：$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$联立，得

$(4\cos\theta+2\sin\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=2$，整理得$\sin\theta\cos\theta=3\cos^2\theta$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{2}$，或$\tan\theta=3$.

不妨记点A对应的极角为$\frac{\pi}{2}$，点B对应的极角为θ，且$\tan\theta=3$.

于是，$\cos\angle AOB=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.……………………10分

23. (1)$f(x)\leqslant x+1$，即$|x-1|+|x-3|\leqslant x+1$.

当$x<1$时，不等式可化为$4-2x\leqslant x+1$，解得：$x\geqslant 1$，又$\because x<1$，此时无解；

当$1\leqslant x\leqslant 3$时，不等式可化为$2\leqslant x+1$，解得：$x\geqslant 1$，又$\because 1\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 3$.

当$x>3$时，不等式可化为$2x-4\leqslant x+1$，解得：$x\leqslant 5$，又$\because x>3$，$\therefore 3<x\leqslant 5$.

综上所得，$1\leqslant x\leqslant 3$或$3<x\leqslant 5$，即$1\leqslant x\leqslant 5$.

$\therefore$原不等式的解集为$[1,5]$. ……………………5分

(2) 由绝对值不等式性质得，$|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$，

$\therefore c=2$，即$a+b=2$.

令$a+1=m$，$b+1=n$，则$m>1$，$n>1$，$a=m-1$，$b=n-1$，$m+n=4$，

$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{(m-1)^2}{m}+\frac{(n-1)^2}{n}=m+n+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=\frac{4}{mn}\geqslant\frac{4}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}=1$，

等且仅当$m=n=2$即$a=b=1$时等号成立.

原不等式得证.……………………10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。