柳州市2023届高三第三次模拟考试
理科数学参考答案

一、选择题（本题共12小题，每小题5分，共60分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	C	C	C	C	B	A	C	D	A	B

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分.）

13. $\frac{1}{3}$　　14. $2\sqrt{21}$　　15. 465　　16. $\frac{7}{13}$

三、解答题（共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. 解:（1）设质量指标值的平均数为$\bar{x}$，中位数为a，则

$\bar{x}=55\times0.15+65\times0.25+75\times0.3+85\times0.2+95\times0.1=73.5$ ……………… 3分

$0.4+(a-70)\times0.03=0.5$， $a\approx73.3$ ……………… 6分

（2）样本中质量指标在$[50,60)$的产品有40×10×0.015=6件，质量指标在$[90,100]$的有40×10×0.01=4件，ξ可能的取值为0，1，2， ……………… 7分

相应的概率为:

$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$， ……………… 8分

$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$， ……………… 9分

$P(\xi=2)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$， ……………… 10分

随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

……………… 11分

期望 $E(\xi)=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{3}=\frac{6}{5}$. ……………… 12分

18．解：（1）$\because AB\perp BC,BC=1,AB=\sqrt{3}$，

由勾股定理得：$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$ ....1 分

△ACD 中，由余弦定理：$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$ ......2 分

$\because AC^2+CD^2=4+12=16=AD^2$，$\therefore DC\perp AC$ ....3 分

又因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$DC\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp DC$ ....4 分

又因为 $AC\cap PA=A$，$\therefore DC\perp$ 平面PAC ....5 分

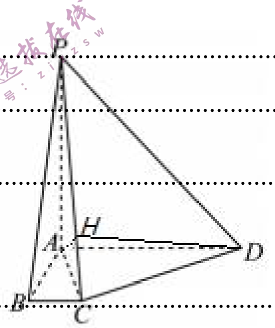
$DC\subset$ 底面 PCD　$\therefore$ 平面$PDC\perp$平面PAC ....6 分

（2）作 $AH\perp PC$，垂直为 H，连结 DH..7 分

因为 平面$PDC\perp$平面PAC，且 平面$PDC\cap$平面$PAC=PC$

所以 $AH\perp$平面PCD ....8 分

所以$\angle ADH$ 为 AD 与平面 PCD 所成的角..9 分



△PAC 中，$AH=\frac{PA\cdot AC}{PC}=\frac{4\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ ....10 分

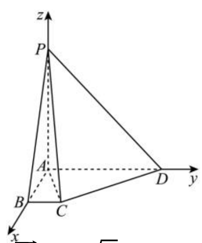
$\sin\angle ADH=\frac{AH}{DA}=\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ....11 分

所以直线 AD 与平面 PCD 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ....12 分

另解:(1)因为 $AD/\!/BC,AB\perp BC$，所以 $AB\perp AD$，且 $PA\perp$底面 $ABCD$，$AB,AD\subset$底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB,PA\perp AD$，所以以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 方向分别为 x,y,z 轴建系如图，..........................1 分

则　.. $A(0,0,0),B(\sqrt{3},0,0),C(\sqrt{3},1,0),D(0,4,0),P(0,0,4)$, ...2 分



设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{CP}=(-\sqrt{3},-1,4),\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},3,0),\ \overrightarrow{AP}=(0,0,4)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\vec{m}=-\sqrt{3}x-y+4z=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}=-\sqrt{3}x+3y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1,z=1$，所以 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,1)$，..........4 分

设平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}a-b+4c=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=4c=0\end{cases}$，令 $a=1$，则 $b=-\sqrt{3},c=0$，所以 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},0)$，......6 分

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$，所以平面 $PCD\perp$平面 PAC ....7 分

（2）因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，且 $AB\perp AD$，$PA\cap AB=A,PA,AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，所以 $\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$ 为平面 PAB 的一个法向量，设直线 AD 与平面 PCD 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times 4}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，……10 分

所以直线 AD 与平面 PCD 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……12 分

19.（1）由条件得：$(2a-c)\cos B=b\cos C$，

由正弦定理，得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，……1 分

即 $2\sin A\cos B=\cos B\sin C+\sin B\cos C$，所以 $2\sin A\cos B=\sin(B+C)$，……2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(B+C)=\sin A$，即 $2\sin A\cos B=\sin A$，……3 分

因为 A 为三角形内角，故 $\sin A\neq 0$，……4 分

所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……6 分

（2）由（1）得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $ac=6$，……7 分

因为 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $|\overrightarrow{BM}|^2=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2=\dfrac{1}{9}\left(c^2+2ac+4a^2\right)$ ……8 分

$=\dfrac{1}{9}\left(c^2+4a^2+2ac\right)\geq\dfrac{1}{9}\cdot(2\sqrt{4a^2c^2}+2ac)=\dfrac{1}{9}\cdot(4ac+2ac)=\dfrac{2}{3}ac=4$，……9 分

当且仅当 $c=2a$ 即 $a=\sqrt{3},c=2\sqrt{3}$ 时，$|\overrightarrow{BM}|$ 取得最小值 2，此时 $\sin C=2\sin A$，……10 分

又因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，所以 $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=2\sin A$，整理得 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……11 分

因为 $0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形. ……12 分

20.(1) $g(x)=2\sin x-x-\ln(x+1)\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}\right)$，$g'(x)=2\cos x-1-\dfrac{1}{x+1}$，$g'(0)=0$，1 分

令 $u(x)=2\cos x-1-\dfrac{1}{x+1}\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}\right),u'(x)=-2\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2},u'(0)=1$，……2 分

令 $v(x)=-2\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2}\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}\right),v'(x)=-2\cos x-\dfrac{2}{(x+1)^3}<0$，……3 分

所以$v(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减，即$u'(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减.

$u'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+1\right)^2}<0,u'(0)\cdot u'\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$，故存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$使$u'(x_0)=0$，.............. 4 分

所以$u(x)$在区间$(0,x_0)$单调递增，在区间$\left(x_0,\frac{\pi}{6}\right)$单调递减，$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-1-\frac{1}{\frac{\pi}{6}+1}>0$，5 分

所以在区间$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上递增，最小值为$g(0)=0$. .... 6 分

(2) 由（1）可知$g(x)=2\sin x-x-\ln(x+1)\geq g(0)=0$在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上恒成立（$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$），

所以$2\sin x-x\geq\ln(x+1)$，.. 7 分

对于函数$h(x)=x-\ln(x+1)\left(0\leq x\leq\frac{1}{2}\right)$，$h(0)=0,h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，所以$h(x)$在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增，..8 分

所以当$0<x<\frac{1}{2}$时，$h(x)>0$，即$x-\ln(x+1)>0,x>\ln(x+1)$，.. 9 分

所以$2\sin x\geq x+\ln(x+1)>\ln(x+1)+\ln(x+1)$，

即$\sin x>\ln(x+1)$在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上恒成立，.. 10 分

所以$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n}>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{2}$.

.... 12 分

21．解:（1）椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$E(1,1)$，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，.. 1 分

椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$a^2=2c^2$，即$a^2=2b^2$，即$\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得$a^2=3,b^2=\frac{3}{2}$，................ 3 分

所以椭圆C_1的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$. .... 4 分

（2）当直线AB斜率不存在时，设以AB为直径的圆的圆心为$(t,0)$，则$(x-t)^2+y^2=t^2$，则不妨取$A(t,t)$，故$\frac{t^2}{3}+\frac{2t^2}{3}=1$，解得$t=\pm1$，故$AB$方程为$x=\pm1$，直线$CD$过$AB$中点，即为$x$轴，得$|AB|=2$，

$|CD|=2\sqrt{3}$，故 $S_{ACBD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2\sqrt{3}$； .... 5 分

直线 AB 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=3\\ y=kx+m\end{cases}$，可得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-3=0$，则 $\Delta=4(6k^2-2m^2+3)>0$ ①，

$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$ ②，$x_1x_2=\frac{2m^2-3}{2k^2+1}$ ③， .... 7 分

以 AB 为直径的圆过原点即 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

化简可得 $(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

将②③两式代入，整理得 $(k^2+1)(2m^2-3)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)=0$， .... 8 分

即 $m^2=k^2+1$ ④，将④式代入①式，得 $\Delta=4(4k^2+1)>0$ 恒成立，则 $k\in\mathrm{R}$，设线段 AB 中点为 M，由 $\overline{OC}=t\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)=2t\overline{OM}$，不妨设 $t>0$，得 $S_{ACBD}=2S_{OACB}=4tS_{\triangle OAB}$， .... 9 分

又∵ $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=|m|\frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}$，∴ $S_{ACBD}=4t|m|\frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}$， .... 10 分

又由 $\overline{OC}=t\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$，则 C 点坐标为 $(t(x_1+x_2),t(y_1+y_2))$，

化简可得 $\begin{cases}t(x_1+x_2)=-\frac{4km}{2k^2+1}t\\ t(y_1+y_2)=-\frac{2m}{2k^2+1}t\end{cases}$，代回椭圆方程可得 $\frac{8m^2t^2}{2k^2+1}=3$ 即 $t=\sqrt{\frac{3(2k^2+1)}{8m^2}}$， .... 11 分

则 $S_{ACBD}=4tS_{\triangle OAB}=4\sqrt{\frac{3(2k^2+1)}{8m^2}}|m|\frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}=\sqrt{6}\sqrt{\frac{4k^2+1}{2k^2+1}}=\sqrt{6}\sqrt{2-\frac{1}{2k^2+1}}<2\sqrt{3}$，

综上，四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$. .... 12 分

22．解：（1）易知曲线 C 的普通方程：$(x+1)^2+(y-1)^2=2$， .... 2 分

因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以曲线 C 的极坐标方程为：$(\rho\cos\theta+1)^2+(\rho\sin\theta-1)^2=2$，即 $\rho=2\sin\theta-2\cos\theta$. .... 5 分

（2）由题意知 $|OA|=2\sin\pi-2\cos\pi=2$，$|OB|=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\cos\alpha+2\sin\alpha$， 6 分

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=(2\cos\alpha+2\sin\alpha)\cos\alpha=2\cos^2\alpha+\sin2\alpha$ .... 7 分

$=\sin2\alpha+\cos2\alpha+1=\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1$， .... 8 分

因为 $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}\le 2\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时，$\triangle AOB$ 的面积最大，最大值是 $\sqrt{2}+1$. ....10 分

23．解:（1）由柯西不等式知 $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z}\right)^2=(a+b+c)^2$，

....4 分

因为 x，y，z 都为正数，故 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$，当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 时，等号成立. ...5 分

（2）$\because a$、b、c 为正数，所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$\ge ab+ac+bc+2ab+2bc+2ac=3(ab+bc+ac)$ ....7 分

由（1）可得 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+cb}+\frac{c^2}{ac+bc}$ ....9 分

$\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)}\ge\frac{3(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号成立. ....10 分