2020～2021年度河南省高三仿真模拟考试

数学(文科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分．考试时间120分钟．
2. 请将各题答案填写在答题卡上．
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容．

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|\sqrt{x}>1\}$，$B=\{x|x-2<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-2,6)$　　B. $(1,6)$　　C. $(-2,1)$　　D. $(1,2)$

2. 已知复数 $z+2$ 为纯虚数，且 $(z+1)(1+i)$ 为实数，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，且 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

4. 若圆 $C:x^2+16x+y^2+m=0$ 被直线 $3x+4y+4=0$ 截得的弦长为6，则 $m=$

A. 26　　B. 31　　C. 39　　D. 43

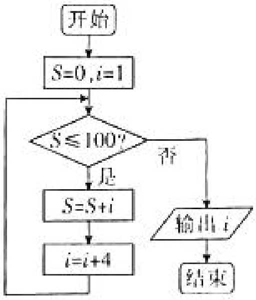
5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\ x-y\leqslant 1,\\ x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. 0

6. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a(\sin A-\sin B)+b\sin B=c\sin C$，$a+b=2c=2$，则△$ABC$ 的面积为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $i=$



A. 7　　B. 8　　C. 29　　D. 33

8. 三星堆古遗址是迄今在西南地区发现的范围最大，延续时间最长，文化内涵最丰富的古城、古国、古蜀文化遗址. 三星堆遗址被称为 20 世纪人类最伟大的考古发现之一，昭示了长江流域与黄河流域一样，同属中华文明的母体，被誉为"长江文明之源". 考古学家在测定遗址年代的过程中，利用"生物死亡后体内的碳 14 含量按确定的比率衰减"这一规律，建立了样本中碳 14的含量 y 随时间 x(年)变化的数学模型：$y=y_0\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$($y_0$ 表示碳 14 的初始量). 2020 年考古学家对三星堆古遗址某文物样本进行碳 14 年代学检测，检测出碳 14 的含量约为初始量的 68%，据此推测三星堆古遗址存在的时期距今大约是(参考数据：$\log_2 5\approx 2.32$，$\log_2 17\approx 4.09$)

A. 2796 年　　B. 3152 年　　C. 3952 年　　D. 4480 年

9. 若关于 x 的方程 $2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{3}-m$ 在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$上有且只有一个解，则 m 的值不可能为

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 0

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，底面 ABC 是面积为 $3\sqrt{3}$ 的正三角形，若三棱锥 $P-ABC$ 的每个顶点都在球 O 的球面上，且点 O 恰好在平面 ABC 内，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

11. 设 F_1，F_2 同时为椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线 C_2：$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$的左、右焦点，设椭圆 C_1 与双曲线 C_2 在第一象限内交于点 M，椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的离心率分别为 e_1，e_2，O 为坐标原点，若 $|F_1F_2|=2|MO|$，则$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

12. 已知函数 $y=f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上可导且函数 $y=f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线斜率为 1，其导函数 $f'(x)$满足$\frac{f'(x)-f(x)}{x-1}>0$，现有下述四个结论：

①$f(1)=1$；②$f(1)=-1$；③$f(x)\geq e^{x-1}$；④函数 $f(x)$至少有 1 个零点.

其中所有正确结论的编号是

A. ①③④　　B. ②③　　C. ①④　　D. ①③

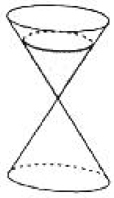
第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知角 θ 的终边经过点 $P(\sqrt{2},a)$，若 $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$，则 $a=$______▲______.

14. "CHINA"由 5 个大写的英文字母构成，若从这 5 个字母中任选 3 个，则取到的 3 个字母中恰有 2 个字母为中心对称图形的概率为______▲______.

15. 沙漏是一种古代的计时装置，它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成，开始时细沙全部在上部容器中，细沙通过连接管道全部流到下部容器所需要的时间称为该沙漏的一个沙时. 如图，某沙漏由上、下两个圆锥组成，该圆锥的高为 1，若上面的圆锥中装有高度为$\frac{2}{3}$的液体，且液体能流入下面的圆锥，则液体流下去后的液面高度为______▲______.



16. 规定记号"Δ"表示一种运算，即 $a\Delta b=(a^2-1)(b^2-2b)$，$a,b\in\mathbf{R}$，若 $k>0$，函数 $f(x)=(kx)\Delta x$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，则 $k=$___▲___.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

某企业有甲、乙两条生产同种产品的生产线. 据调查统计，100 次生产该产品所用时间的频数分布表如下：

所用的时间(单位:天)	10	11	12	13
甲生产线的频数	10	20	10	10
乙生产线的频数	5	20	20	5

假设订单 A 约定交货时间为 11 天，订单 B 约定交货时间为 12 天(将频率视为概率，当天完成即可交货).

(1)为最大可能在约定时间交货，判断订单 A 和订单 B 应如何选择各自的生产线(订单 A,B 互不影响)；

(2)已知甲、乙生产线每次的生产成本均为 3 万元，若生产时间超过 11 天，生产成本将每天增加 5000 元，求这 100 次生产产品分别在甲、乙两条生产线的平均成本.

18.(12 分)

在公比大于 0 的等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 a_2，a_3，$6a_1$ 依次组成公差为 4 的等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

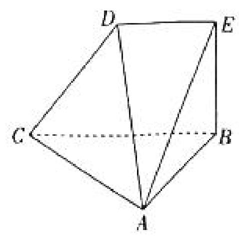
(2)设 $c_n=\frac{\log_2 a_{2n}-5}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.(12 分)

如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$BC/\!/DE$，$BE\perp BC$，$AB=BC=AC=2DE=2BE$.

(1)证明：$AD\perp BC$.

(2)若平面 $BCDE\perp$ 平面 ABC，$AB=2$，经过 A，D 的平面 α 将四棱锥 $A-BCDE$ 分成的左、右两部分的体积之比为 $1:2$，求平面 α 截四棱锥 $A-BCDE$ 的截面面积.



20.(12分)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F,点 $P(1,y_0)$ 在抛物线 C 上,$|PF|=\frac{5y_0}{4}$.

(1)求抛物线 C 的标准方程.

(2)已知直线 l 交抛物线 C 于点 A,B,且 $PA\perp PB$,证明:直线 l 过定点.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=me^x,g(x)=\ln x+1$.

(1)若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共点,求 m 的取值范围;

(2)若不等式 $f(x)>g(x)+1$ 恒成立,求整数 m 的最小值.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\sin\theta+m\rho\cos\theta-2\sqrt{3}=0(m>0)$.

(1)当 $m=\sqrt{3}$ 时,求 C 与 l 交点的直角坐标;

(2)射线 OP 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}$,射线 OP 与曲线 C 的交点为 A(异于点 O),与直线 l 的交点为 B,若 A 为 OB 的中点,求 m.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=m|x-2|+|x+1|$.

(1)当 $m=2$ 时,求不等式 $f(x)\geq 8$ 的解集.

(2)若 $m=1,a>0,b>0,a^3+b^3=\frac{27}{4}$,证明:$f(x)\geq a+b$.

2020～2021 年度河南省高三仿真模拟考试
数学参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.
因为 $A=\{x|x>1\}$,$B=\{x|x<6\}$,所以 $A\cap B=(1,6)$.

2. D 【解析】本题考查复数的乘法运算和共轭复数,考查运算求解能力.
因为复数 $z+2$ 为纯虚数,所以设 $z=-2+bi(b\neq 0)$,则 $(z+1)(1+i)=(-1+bi)(1+i)=-1-b+(b-1)i$ 为实数,所以 $b=1$,则 $|z|=\sqrt{5}$.

3. D 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查运算求解能力.
由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$,所以 $2+2m=4$,则 $m=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,故选 D.

4. C 【解析】本题考查圆的方程,直线和圆的位置关系,考查运算求解能力.
$x^2+16x+y^2+m=0$ 可化为 $(x+8)^2+y^2=64-m(m<64)$,所以圆心到直线 $3x+4y+4=0$ 的距离 $d=\frac{|-24+4|}{5}=4$,所以 $4^2+3^2=64-m$,解得 $m=39$.

5. B 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.
画出可行域(图略)知,当 $l:2x-y=0$ 平移到过点 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ 时,z 取得最大值,最大值为 $\frac{5}{2}$.

6. B 【解析】本题考查解三角形,考查运算求解能力.
因为 $a(\sin A-\sin B)+b\sin B=c\sin C$,由正弦定理得 $a(a-b)+b^2=c^2$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$,所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. 又 $a+b=2c=2$,则 $c=1$,$a+b=2$,由 $a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-1=ab$,$(a+b)^2-3ab=1$,得 $ab=1$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. D 【解析】本题考查程序框图,考查逻辑推理能力.
依据程序框图的算法功能可知,$S=1+5+9+\cdots+25=91<100$,$i=29$;$S=1+5+9+\cdots+25+29=120>100$,$i=33$,则输出 $i=33$.

8. B 【解析】本题考查对数的运算,考查逻辑推理能力.
设三星堆古遗址存在的时期距今大约是 x 年,则 $y_0\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}=68\%y_0$,即 $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}=0.68$,
所以 $\frac{x}{5730}=\log_{\frac{1}{2}}0.68=\log_2 25-\log_2 17=2\log_2 5-\log_2 17\approx 0.55$,解得 $x\approx5730\times0.55\approx3152$.

9. B 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数形结合的数学思想.
$2\sqrt{3}\cos^2x-\sin 2x=\sqrt{3}-m$ 化简可得 $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{m}{2}$,即 $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{m}{2}$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$ 上有且只有一个解,即 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象和直线 $y=-\frac{m}{2}$ 只有 1 个交点.

又 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$,则 $2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$,即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时,可得 $y=\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$;

当 $2x+\frac{\pi}{6}=0$,即 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时,可得 $y=1$;

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,可得 $y=0$.

要使得 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象和直线 $y=-\frac{m}{2}$ 只有 1 个交点,

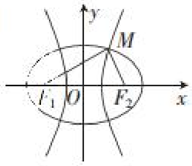
结合 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象(图略),可得 $-\frac{m}{2}=1$ 或 $0\leqslant-\frac{m}{2}<\frac{1}{2}$,

解得 $m=-2$ 或 $-1<m\leqslant0$,故选 B.

10. B 【解析】本题考查三棱锥的外接球,考查空间想象能力.

由题可知底面 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$，因为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心 O 恰好在平面 ABC 内，所以球 O 的半径为 2，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$.

11. D **【解析】本题考查椭圆与双曲线的性质，考查数形结合的数学思想.**



如图，设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，焦距为 $2c$，由椭圆定义可得 $m+n=2a$，由双曲线定义可得 $m-n=2a_1$，解得 $m=a+a_1$，$n=a-a_1$.
当 $|F_1F_2|=2|MO|$ 时，则 $\angle F_1MF_2=90^\circ$，所以 $m^2+n^2=4c^2$，
即 $a^2+a_1^2=2c^2$，由离心率的公式可得 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$.

12. D **【解析】本题考查导数的应用，考查数形结合的思想和逻辑推理能力.**

令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.
由题意得当 $x>1$ 时，$f'(x)-f(x)>0$，所以 $y=g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；
当 $x<1$ 时，$f'(x)-f(x)<0$，所以 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.
故 $x=1$ 是函数 $y=g(x)$ 的极小值点，即 $\frac{f'(1)-f(1)}{e}=0$，则 $f(1)=1$.
由 $y=g(x)$ 的单调性可得 $g(x)\geqslant g(1)$，则 $\frac{f(x)}{e^x}\geqslant\frac{f(1)}{e}$，则 $f(x)\geqslant e^{x-1}$，
所以 $f(x)>0$. 故函数 $f(x)$ 没有零点.

13. $-\frac{1}{2}$ **【解析】本题考查三角函数的定义以及诱导公式，考查运算求解能力.**

由题意，角 θ 的终边经过点 $P(\sqrt{2},a)$，可得 $|OP|=\sqrt{2+a^2}$.
又由 $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$，根据三角函数的定义，可得 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{2+a^2}}=-\frac{1}{3}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

14. $\frac{3}{5}$ **【解析】本题考查古典概型，考查逻辑推理能力.**

从 C，H，I，N，A5 个字母中任取 3 个有{C，H，I}，{C，H，N}，{C，H，A}，{C，I，N}，{C，I，A}，{C，N，A}，{H，I，N}，{H，I，A}，{H，N，A}，{I，N，A}，共 10 种不同的取法，则取到的 3 个字母中恰有 2 个字母为中心对称图形的有{C，H，I}，{C，H，N}，{C，I，N}，{H，I，A}，{H，N，A}，{I，N，A}. 共 6 种不同的取法，故所求概率为 $\frac{3}{5}$.

15. $1-\frac{\sqrt[3]{19}}{3}$ **【解析】本题考查圆锥的体积，考查空间想象能力.**

$\frac{V_{液}}{V_{圆锥}}=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$，当液体流下去后，$\frac{V_{圆锥}-V_{液}}{V_{圆锥}}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$，所以液体流下去后的液面高度为 $1-\frac{\sqrt[3]{19}}{3}$.

16. 1 **【解析】本题考查新定义与函数的性质，考查数形结合的数学思想.**

$f(x)=(kx)\Delta x=(k^2x^2-1)(x^2-2x)=(kx-1)(kx+1)x(x-2)$，因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，所以 $\begin{cases}0+\frac{1}{k}=1,\\2-\frac{1}{k}=1,\end{cases}$ 解得 $k=1$.

17. 解：(1) 频率分布表如下：

所用的时间(单位：天)	10	11	12	13
甲生产线的频率	0.2	0.4	0.2	0.2
乙生产线的频率	0.1	0.4	0.4	0.1

设 A_1，A_2 分别表示订单 A 选择甲、乙生产线在约定时间交货；B_1，B_2 分别表示订单 B 选择甲、乙生产线在约定时间交货.
$P(A_1)=0.2+0.4=0.6$，…… 1 分
$P(A_2)=0.1+0.4=0.5$，…… 2 分

$P(B_1)=0.2+0.4+0.2=0.8$, …… 3分

$P(B_2)=0.1+0.4+0.4=0.9$, …… 4分

所以订单 A 选择甲生产线,订单 B 选择乙生产线. …… 6分

(2)甲生产线的平均成本为 $3\times\frac{30}{50}+3.5\times\frac{10}{50}+4\times\frac{10}{50}=3.3$ 万元, …… 9分

乙生产线的平均成本为 $3\times\frac{25}{50}+3.5\times\frac{20}{50}+4\times\frac{5}{50}=3.3$ 万元. …… 12分

18. 解:(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,因为 $a_2,a_3,6a_1$ 成等差数列,所以 $a_2+6a_1=2a_3$,则 $2q^2-q-6=0$,又 $q>0$,所以 $q=2$. …… 2分

又因为 $a_3-a_2=4$,所以 $a_1=2$, …… 4分

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$. …… 6分

(2)由题可知 $c_n=\frac{\log_2 a_{2n}-5}{a_n}=\frac{2n-5}{2^n}$, …… 7分

则 $T_n=\frac{-3}{2}+\frac{-1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{2n-5}{2^n}$.① …… 8分

$\frac{1}{2}T_n=\frac{-3}{2^2}+\frac{-1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{2n-7}{2^n}+\frac{2n-5}{2^{n+1}}$.② …… 9分

①－②得$\frac{1}{2}T_n=\frac{-3}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n-5}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}+\frac{1-2n}{2^{n+1}}$. …… 10分

故 $T_n=-1-\frac{2n-1}{2^n}$. …… 12分

19. (1)证明:如图,取 BC 的中点 O,连接 AO,DO.

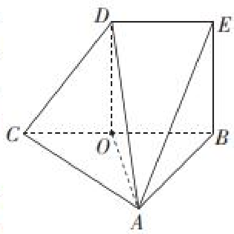
因为 $BO=DE$,$BO/\!/DE$,所以 $BODE$ 为平行四边形,

又 $EB\perp BC$,所以 $DO\perp BC$. …… 2分

因为 $AB=BC=AC$,所以 $AO\perp BC$, …… 3分

又 $AO\cap DO=O$,所以 $BC\perp$平面 ADO. …… 4分

因为 $AD\subset$平面 ADO,所以 $AD\perp BC$. …… 5分



(2)解:因为平面 $BCDE\perp$平面 ABC,平面 $BCDE\cap$平面 $ABC=BC$,

所以 $DO\perp$平面 ABC. …… 7分

因为 $V_{\triangle CDO}:V_{DOBE}=1:2$,所以平面 ADO 即为平面 α. …… 10分

因为 $AO\perp OD$,所以 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即平面 α 截四棱锥 $A-BCDE$ 的截面面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 12分

20. (1)解:过 P 向抛物线的准线作垂线,垂足为 Q(图略),则$|PQ|=y_0+\frac{p}{2}=\frac{5y_0}{4}$,故 $y_0=2p$. …… 2分

又 $P(1,y_0)$在抛物线上,所以 $y_0=\frac{1}{2p}$. …… 3分

则 $2p=\frac{1}{2p}$,解得 $p=\frac{1}{2}$,$y_0=1$. …… 4分

故抛物线 C 的标准方程为 $x^2=y$. …… 5分

(2)证明:设 $A(x_1,x_1^2)$,$B(x_2,x_2^2)$,直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

则 $k_{PA}=\frac{x_1^2-1}{x_1-1}=x_1+1$,$k_{PB}=\frac{x_2^2-1}{x_2-1}=x_2+1$. …… 7分

因为 $PA\perp PB$,所以$(x_1+1)(x_2+1)=-1$,即 $x_1+x_2+x_1x_2+2=0$, …… 8分

将直线 l 的方程与抛物线方程联立可得,$x^2-kx-m=0$,

则 $x_1+x_2=k$,$x_1x_2=-m$, …… 9分

所以 $k-m+2=0$, …… 10分

直线 l 的方程为 $y=kx+k+2=k(x+1)+2$,则直线 l 过定点$(-1,2)$. …… 12分

21. 解:(1)令 $f(x)=g(x)$,即 $me^x=\ln x+1$,则 $m=\frac{\ln x+1}{e^x}$, …… 1分

令 $h(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$,则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$.

令 $k(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$，则函数 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $k(1)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…………………… 3 分

所以 $m\leqslant\frac{1}{e}$. …………………… 5 分

(2)令 $x=1$，则 $me>\ln 1+2$，解得 $m>\frac{2}{e}$，故 $m\geqslant1$. …………………… 7 分

当 $m=1$ 时，令 $m(x)=e^x-\ln x-2$，$m'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，且 $m'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $m'(1)>0$，$m'(\frac{1}{2})<0$，可知存在唯一的正数 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $m'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，

则 $m(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 9 分

所以 $m(x)_{\min}=m(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$，…………………… 11 分

故整数 m 的最小值为 1. …………………… 12 分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha,\end{cases}$ 可得 $x^2+(y-1)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=1$. …………………… 2 分

当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\sqrt{3}\rho\sin\theta+\sqrt{3}\rho\cos\theta-2\sqrt{3}=0$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$. …………………… 3 分

由 $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1,\\ x+y-2=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

从而 C 与 l 交点的直角坐标为 $(0,2)$ 和 $(1,1)$. …………………… 5 分

(2)曲线 C 的普通方程可化为 $x^2+y^2-2y=0$，所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，…………………… 6 分

由题意设 $A(\rho_1,\frac{\pi}{6})$，$B(\rho_2,\frac{\pi}{6})$.

将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho=2\sin\theta$，可得 $\rho_1=1$； …………………… 7 分

将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入 $\sqrt{3}\rho\sin\theta+m\rho\cos\theta-2\sqrt{3}=0$，可得 $\rho_2=\frac{4}{m+1}$. …………………… 8 分

又 A 为 OB 的中点，则 $\frac{4}{m+1}=2$，解得 $m=1$. …………………… 10 分

23. (1)解：当 $m=2$ 时，$f(x)=2|x-2|+|x+1|$.

当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=4-2x-x-1=-3x+3\geqslant8$，解得 $x\leqslant-\frac{5}{3}$，此时 $x\leqslant-\frac{5}{3}$； …………………… 1 分

当 $-1<x<2$ 时，$f(x)=4-2x+x+1=5-x\geqslant8$，解得 $x\leqslant-3$，此时 $x\in\varnothing$；…………………… 2 分

当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)=2x-4+x+1=3x-3\geqslant8$，解得 $x\geqslant\frac{11}{3}$，此时 $x\geqslant\frac{11}{3}$. …………………… 3 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant8$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{5}{3}]\cup[\frac{11}{3},+\infty)$. …………………… 4 分

(2)证明：因为 $a^3+b^3=\frac{27}{4}$，所以 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=\frac{27}{4}$，

则 $(a+b)[(a+b)^2-3ab]=\frac{27}{4}$. …………………… 5 分

由均值不等式可得，$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，

所以 $(a+b)[(a+b)^2-3ab]=\frac{27}{4}\geqslant(a+b)[(a+b)^2-3(\frac{a+b}{2})^2]$， …………………… 6 分

所以 $a+b\leqslant3$，当且仅当 $a=b=\frac{3}{2}$ 时等号成立. …………………… 7 分

又 $m=1$，$f(x)=|x-2|+|x+1|\geqslant|(x-2)-(x+1)|=3$，…………………… 9 分

所以 $f(x)\geqslant a+b$ 成立. …………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜

自主选拔在线