南宁市2023届高中毕业班第二次适应性测试参考答案

文科数学

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	C	D	B	C	C	A	A	C	D

12.D 解：依题意,因为$g(x)$为偶函数,所以$g(x)=g(-x)$,所以$g'(x)=-g'(-x)$,

所以$g'(x)$为奇函数且$g'(0)=0$,因为$f(x)+g'(x)=2, f(x)-g'(4-x)=2$,

令$x=2$,则有$\begin{cases}f(2)+g'(2)=2\\f(2)-g'(4-2)=2\end{cases}$,解得$f(2)=2$.因为$f(x)-g'(4-x)=2$,

所以$f(x+4)-g'(-x)=2$,又$g'(x)=-g'(-x)$,所以$f(x+4)+g'(x)=2$

由$\begin{cases}f(x)+g'(x)=2\\f(x+4)+g'(x)=2\end{cases}$，得$f(x)=f(x+4)$,所以$f(x)$是以4为周期的周期函数,

所以$f(2022)=f(2)=2$,所以$f(2022)+2=4$.故选：D

二、填空题

13. 4　　14. $x+2y+8=0$或$x+2y-2=0$（正确写出一个方程可给5分）

15. 7　　16. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

解:将ΔACD沿AD翻折到与ΔABD共面得到平面四边形ABDC如图1所示.

设$CD=x$,由题意得:$C'B=\sqrt{10}$,在$\Delta C'BD$中,由余弦定理得:$C'B^2=C'D^2+BD^2-2C'D\cdot BD\cdot\cos135°$

即$(\sqrt{10})^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2x\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

即$x^2+2x-8=0$,解得$x=2$或$x=-4$(舍去),

将三棱锥$A-BCD$补成长方体如图2所示

该棱锥的外接球即为长方体的外接球,

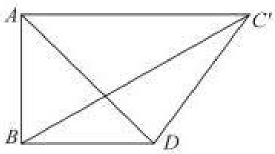


图1

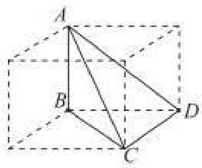


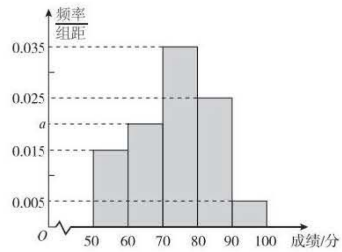
图2

则外接球的半径为:$R=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{2}$,

所以外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$,故答案为:$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

三、解答题

17.为庆祝神舟十四号载人飞船返回舱成功着陆，某学校开展了航天知识竞赛活动，共有 **100** 人参加了这次竞赛，已知所有参赛学生的成绩均位于区间 $[50,100]$，将他们的成绩(满分 **100** 分)分成五组依次为 $[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，制成如图所示的频率分布直方图.



（1）试估计这 **100** 人的竞赛成绩的平均数;

（2）采用按比例分配的分层抽样的方法，从竞赛成绩在$[80,100]$ 内的学生中随机抽取 **6** 人作为航天知识宣讲使者，再从第四组和第五组的使者中随机抽取 **2** 人作为组长，求这 **2** 人来自同一组的概率.

解:(1)依题意可得:$(0.015+a+0.025+0.035+0.005)\times10=1$ ……………1 分

解得:$a=0.02$ ……………………………………………………………2 分(3 分)

【备注 1】结果正确，见 “$a=0.02$”可给 3 分；若结果不准确，但写出“$(0.015+a+0.025+0.035+0.005)\times10=1$”，可给 1 分。

根据频率分布直方图知:平均数的估计值为

$55\times0.15+65\times0.2+75\times0.35+85\times0.25+95\times0.05=73.5$

所以这 100 人的竞赛成绩的平均数的估计值为 73.5……………3 分(6 分)

【备注 2】见“55×0.15”、“65×0.2”、“75×0.35”、“85×0.25”、“95×0.05”之一，可给 1 分。

【备注 3】结果正确，见“73.5”可给 2 分。

(2)由题可知,竞赛成绩在$[80,90)$,$[90,100]$两个组中,人数之比为5:1,现采用分层

抽样从中抽取 **6** 人,所以每组各抽学生人数分别为$5,1$……………**2** 分(**8** 分)

【备注 **4**】见"每组各抽学生人数分别为$5,1$"各给 **1** 分,共 **2** 分.

分别记$[80,90)$中所抽取的 **5** 人编号依次为$1,2,3,4,5$,$[90,100]$中所抽取的 **1** 人编号为A所以从 **6** 人中随机抽取 **2** 人的情况为:

$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,A),(2,3),(2,4),(2,5),(2,A),(3,4),(3,5),(3,A),(4,5),(4,A),(5,A)$,

共 **15** 种结果……………………………………………………**2** 分(**10** 分)

【备注 **5**】结果正确,见"共 **15** 种结果"或"共$C_{10}^{2}=15$种",可给 **2** 分;若结果不正确,但能至少列出 **1** 种情况以上,可给 **1** 分.

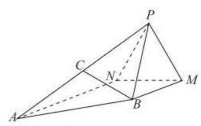
其中这 **2** 人来自同一组(记为事件M)的有 **10** 种………………**1** 分(**11** 分)

【备注 **6**】结果正确,见有 **10** 种",可给 **1** 分

所以$P(M)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$所以这 **2** 人来自不同组的概率为$\frac{2}{3}$…………**1** 分(**12** 分)

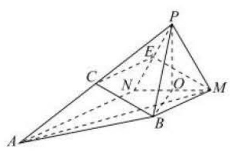
【备注 **7**】见"$\frac{2}{3}$"可给 **1** 分.

18. 如图,在四棱锥$P-ABMN$中,ΔPMN是边长为 **1** 的正三角形,平面$PMN\perp$平面AMN,$AN//BM$,$AN\perp NP$,$AN=2BM=2$,C为PA的中点.



(**1**) 求证:$BC//$平面PMN;(**2**)求M到平面PAB的距离.

解:(**1**)证明:取PN中点E,连接CE和ME……**1** 分



$\because C$为PA中点,$\therefore CE//AN$且$CE=\frac{1}{2}AN$………**1** 分

【备注 **1**】见"$CE//AN$"给 **1** 分。

$\because BM//AN$且$BM=\frac{1}{2}AN$ $\therefore BM//CE$且$BM=CE$……**1** 分(**3** 分)

【备注 **2**】见"$BM//CE$"给 **1** 分。

$\therefore$四边形$BMEC$为平行四边形,则BM/EM ………**1** 分

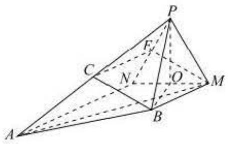
【备注 **3**】见"BM/EM "给 **1** 分。

$\because EM \subset$ 面 PMN, $BC \not\subset$ 面 PMN, $\therefore BC //$ 面 PMN ......1 分(5 分)

【备注 4】若缺少写出"$BC \not\subset$ 面 PMN,"扣 1 分.

(2)解:连接 AM,取 MN 中点 O,连接 PO............1 分(6 分)

【备注 5】体现作图过程,给 1 分.



则等边 ΔPMN 中 $PO \perp MN, EM \perp PN$.

$\because$ 面 $PMN \perp$ 面 $AMN, MN =$ 面 $PMN \cap$ 面 AMN,

$\therefore PO \perp$ 面 AMN..1 分(7 分)

【备注 5】见"$PO \perp$ 面 AMN."给 1 分.

$\therefore PO \perp AN$.

$\because AN \perp NP, PO \cap NP = P, \therefore AN \perp$ 面 PMN, $AN \perp MN$, $BM \perp MN$.

$\therefore V_{P-ABM} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABM} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BM \cdot MN \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. ....1 分(8 分)

【备注 6】见"$V_{P-ABM} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABM} \cdot PO$."可给 1 分.

因直角梯形 $ABMN$ 中 $AB = \sqrt{2}$,连接 OB,则 $PO \perp OB, OB = \sqrt{OM^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore PB = \sqrt{PO^2 + OB^2} = \sqrt{2}$...1 分(9 分)

$\therefore PB = AB$, $BC \perp AP$, $AP = \sqrt{AN^2 + NP^2} = \sqrt{5}$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \times AP \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$............................1 分(10 分)

【备注 7】见"$S_{\Delta ABP} = \frac{\sqrt{15}}{4}$"给 1 分.

设 M 到面 PAB 的距离为 h,则

4

$\therefore V_{P\text{-}ABM}=V_{M-ABP}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABP}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times h=\frac{\sqrt{3}}{12}$,解得 $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………2 分(12 分)

【备注 8】结果正确,见“$h=\frac{\sqrt{5}}{5}$”即可给 **2** 分;若结果不正确,但能写出“$V_{P\text{-}ABM}=V_{M-ABP}$”,体现等体积法,可给 **1** 分.

19. 记 S_n 为各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,$S_3=7$ 且 $a_3,3a_2,a_4$ 成等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$,求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解:(1)设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,公比为 q,

则 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=7$①………………………………1 分

【备注 1】正确写出“$a_1\left(1+q+q^2\right)=7$”、“$\frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=7$”之一,给 **1** 分。

因为 $a_3,3a_2,a_4$ 成等差数列,则 $6a_2=a_3+a_4$ 即 $6a_1q=a_1q^2+a_1q^3$②………1 分

【备注 2】正确写出“$6a_2=a_3+a_4$”、“$6a_1q=a_1q^2+a_1q^3$”之一,给 **1** 分。

故联立①②可得 $q^2+q-6=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍) ……………2 分(4 分)

【备注 3】正确写出“$q^2+q-6=0$”、“$q=2$”之一,可给 **2** 分。

$\therefore a_1=1,a_n=2^{n-1}$……………………………………………………2 分(6 分)

【备注 4】正确写出“$a_n=2^{n-1}$”给 **2** 分.

(2)由 $b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$ 得 $b_n=2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$ ……………………………1 分

则 $T_n=b_1+b_1+\cdots+b_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$ ①…………………1 分(8 分)

所以 $2T_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$ ②…………………1 分

【备注 5】写出能体现将①式两边同乘以 **2** 的方法,给 **1** 分.

① 一②得……………………………………………………………1 分(10 分)

【备注 6】正确写出“①—②”、“②—①”、“两式相减”之一，给 1 分。

则 $-T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$…1 分

【备注 7】正确写出“$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$”、“$-n\cdot 2^{n+1}$”、“$2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$”之一，给 1 分。

∴ $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$……………………………………………………1 分(12 分)

【备注 8】正确写出“$(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$”、“ $n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+2$”之一，给 1 分。

理17 文19题第二问

方法二：(2) 由 $b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$，得 $b_n=2n\cdot 2^{n-1}$ …… 1分

$T_n=2\times 2^0+4\times 2+6\times 2^2+\cdots+2(n-1)2^{n-2}+2n\cdot 2^{n-1}$ ① … 1分(8分)

$2T_n=2\times 2+4\times 2^2+\cdots+2(n-1)2^{n-1}+2n\cdot 2^n$ ② … 1分

①-②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-2n\cdot 2^n$ … 1分(10分)

$=\dfrac{2-2^{n+1}}{1-2}-2n\cdot 2^n$

$=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$ … 1分

[备注]正确写出“①-②”、“②-①”、“两式相减”之一，给1分

$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ … 1分(12分)

20. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 经过点 $P(1,-2)$，过点 $Q(0,-1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同交点 A, B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

（1）求直线 l 斜率的取值范围；

（2）证明:存在定点 T，使得 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QT}$ 且 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=-4$.

解:(1)解法 1: 将 $P(1,-2)$ 代入抛物线得 $p=2,\therefore y^2=4x$………………2 分

【备注 1】写出“$y^2=4x$”,给 2 分.若结果不准确,但写出“$p=2$”,可给 1 分

依题意可设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_1,y_1\right)$,直线 $l:y=kx-1(k\neq 0)$……………… ….1 分(3 分)

【备注 2】见“$y=kx-1$”,可给 1 分

联立直线l与抛物线$y^2=4x$得：$k^2x^2-(2k+4)x+1=0$，

则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4+2k}{k^2}\\x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}\end{cases}$ ……………………………………………………1 分

【备注 3】正确写出“$x_1+x_2=\dfrac{4+2k}{k^2}$”、“$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}$”之一，给 1 分。

由$\begin{cases}k\neq 0\\\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}$得$k>-1$且$k\neq 0$……………………………………………………1 分(5 分)

【备注 4】正确写出“$\begin{cases}k\neq 0\\\Delta>0\end{cases}$”、“$k>-1$且$k\neq 0$”之一，给 1 分。

又直线PA交y轴于M，直线PB交y轴于N，所以直线不能

过$P(1,-2)$及$(1,2)$,$\therefore k\neq -1$且$k\neq 3$，

综上$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$……………………………………………1 分（6 分）

【备注 5】见“$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$”、“$-1<k<0$或$0<k<3$或$k>3$”之一，可给 1 分。

(1)解法 2：将$P(1,-2)$代入抛物线得$p=2,\therefore y^2=4x$…………………2 分

【备注 1】写出“$y^2=4x$”,给 2 分.若结果不准确,但写出“$p=2$”,可给 1 分

依题意可设$A(x_1,y_1),B(x_1,y_1)$,直线$l:y=kx-1(k\neq 0)$……………… ….1 分(3 分)

【备注 2】见“$y=kx-1$”,可给 1 分

$\begin{cases}y=kx-1\\y^2=4x\end{cases}$，得：$ky^2-4y-4=0$，………………… ….1 分(4 分)

【备注 3】只要联立方程消去x后的方程正确即可得这 1 分。

则$\begin{cases}k\neq 0\\\Delta=16+16k>0\end{cases}$， 得$k>-1$且$k\neq 0$ ………………. ….1 分(5 分)

7

【备注 4】正确写出$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=16+16k>0 \end{cases}$或 $k>-1$ 且$k\neq 0$其中之一给 1 分

又直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N，所以直线不能

过 $P(1,-2)$ 及 $(1,2)$,$\therefore k\neq -1$ 且$k\neq 3$，

综上 $k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$ ……………………………………1 分（6 分）

【备注 5】见"$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$"、"$-1<k<0$ 或 $0<k<3$ 或 $k>3$"之一，可给 1 分。

(2)设点 $M(0,y_M),N(0,y_N)$，由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QT}$, $Q(0,-1)$，

则可设 $T(0,t)$ $\overrightarrow{QM}=(0,y_M+1),\overrightarrow{QT}=(0,t+1)$.

$\because \overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT},\therefore y_M+1=\lambda(t+1)$ 故 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{t+1}{y_M+1}$ …………………………1 分

同理:$\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{t+1}{y_N+1}$ ……………………………………………………1 分(8 分)

【备注 6】见"$\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{t+1}{y_M+1}$"、"$\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{t+1}{y_N+1}$"各给 1 分。

$\because k_{PA}=\dfrac{y_1+2}{x_1-1}=\dfrac{4}{y_1-2}$,$\therefore$直线 $PA:y+2=\dfrac{4}{y_1-2}(x-1)$，

令 $x=0$ 得 $y_M=\dfrac{-2y_1}{y_1-2}$……………………………………………1 分

同理 $y_N=\dfrac{-2y_2}{y_2-2}$， ……………………………………………1 分（10 分）

【备注 7】见"$y_M=\dfrac{-2y_1}{y_1-2}$"、"$y_N=\dfrac{-2y_2}{y_2-2}$"各给 1 分。

$\therefore \dfrac{1}{\mu}=\dfrac{t+1}{y_N+1}=(t+1)\dfrac{2-y_2}{y_2+2},\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{t+1}{y_M+1}=(t+1)\dfrac{2-y_1}{y_1+2}$

$\therefore \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=(t+1)\left(\dfrac{-y_1+2}{y_1+2}+\dfrac{-y_2+2}{y_2+2}\right)=(t+1)\dfrac{-2y_1y_2+8}{(y_1+2)(y_2+2)}$ …………1 分(11 分)

【备注 8】若$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$最终表达式不准确,但表达式中出现$y_1+y_1$或$y_1\cdot y_2$其中

之一,也可给 **1** 分。

$$=(t+1)\frac{8+\frac{8}{k}}{4+\frac{4}{k}}=2(t+1)=-4\ \therefore t=-3$$

所以存在点 $T(0,-3)$ 满足题意. ....**1** 分(**12** 分)

【备注 **9**】见"$T(0,-3)$"即给 **1** 分;

21.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{ax^2}{2},a>0$.

(1) 若 $f(x)$ 过点 $(1,0)$,求 $f(x)$ 在该点处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $0<x_1<x_2$,当 $\mathrm{e}<a<\frac{\mathrm{e}^2}{2}$ 时,证明:$x_1+x_2>2$.

解:**(1)**已知 $f(x)=e^x-\frac{ax^2}{2},a>0$,将 $(1,0)$ 代人得 $e-\frac{a}{2}=0$.则 $a=2e$.........**1** 分

【备注 **1**】见"$a=2e$."给 **1** 分.

所以 $f(x)=e^x-ex^2,f'(x)=e^x-2ex$. ....**1** 分(**2** 分)

【备注 **2**】见"$f'(x)=e^x-2ex$"、"$f'(x)=e^x-aex$."之一,给 **1** 分.

所以 $f'(1)=e-2e=-e$. ....**1** 分

所以所求切线方程为 $y=-e(x-1)$,即 $ex+y-e=0$. ....**1** 分(**4** 分)

(2) $f'(x)=e^x-ax,f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $0<x_1<x_2$

所以 x_1,x_2 是方程 $e^x-ax=0$ 的两根......................................**1** 分

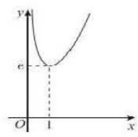
不妨令 $F(x)=\frac{e^x}{x}$,则 $F'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.令 $F'(x)=0$ 解得 $x=1$..............**1** 分(**6** 分)

【备注 **3**】见"令 $F(x)=\frac{e^x}{x}$"、"令 $F'(x)=0$ 解得 $x=1$."之一,给 **1** 分.

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增. ....**1** 分(**7** 分)

【备注 4】见“在$(0,1)$单调递减”、“在$(1,+\infty)$单调递增”之一，给 1 分.

其大致图像如图所示,由图像可知当$a\in(e,\frac{e^2}{2})$,



由$\begin{cases}e^{x_1}=ax_1\\e^{x_2}=ax_2\end{cases}$,两边取对数得$\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$,

作差得$x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$. ……………………………………………1 分(8 分)

要证$x_1+x_2>2$,等价于证明

$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1>\frac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$. ……………1 分(9 分)

【备注 5】体现正确写出同构过程,给 1 分.

令$\frac{x_1}{x_2}=t(t\in(0,1)),\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1},t\in(0,1)$. ……………………………1 分(10 分)

【备注 6】写出构造新的函数,给 1 分.

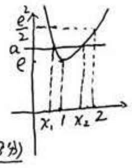
$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)^2-4t}{t(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$.故$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增.....1 分

【备注 7】见“$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增”,给 1 分.

从而$\varphi(t)<\varphi(1)=0$,即$x_1+x_2>2$. …………………………………………………1 分(12 分)

【备注 8】见“$\varphi(t)<\varphi(1)=0$”,给 1 分.

文21 方法二：



其大致图像如图所示

由图像可知当 $a\in(e,\frac{e^2}{2})$

得：$0<x_1<1<x_2<2$

$\therefore 0<2-x_2<1$ ……1分（8分）

要证 $x_1+x_2>2$

等价于证明 $x_1>2-x_2$

而 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减

即证明：$F(x_1)<F(2-x_2)$，又 $F(x_1)=F(x_2)$ ……1分（9分）
（出现 $F(x_1)<F(2-x_2)$，给1分）

即证明：$F(x_2)<F(2-x_2)$

设 $G(x)=F(x)-F(2-x)$ $(1<x<2)$ ……1分（10分）

$G'(x)=F'(x)-F'(2-x)$ （写出构造函数，给1分）

$=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{e^{2-x}(1-x)}{(2-x)^2}$

$=(x-1)\left[\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^{2-x}}{(2-x)^2}\right]$

<0

$\therefore G(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减 ……1分（11分）
（见 $G(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减，给1分）

从而 $G(x)<G(1)=0$

即 $F(x)<F(2-x)$ ……1分（12分）

$\therefore x_1+x_2>2$ （见 $G(x)<G(1)=0$，给1分）

文21 方法三：接方法一：

由 $\begin{cases}e^{x_1}=ax_1\\ e^{x_2}=ax_2\end{cases}$ 取对数得 $\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\ x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$

作差 $x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$ ……1分（8分）

由对数均值不等式得 ……1分（9分）

$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

$\therefore 1<\frac{x_1+x_2}{2}$ $\therefore x_1+x_2>2$ ……1分（10分）

以下证明：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ $(x_1<x_2)$

即证明：$\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$

令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，$t\in(0,1)$，$\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ ……1分（11分）

$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$

故 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 单调递增

从而 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$ 即 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ ……1分（12分）

22.在直角坐标系 xOy 中已知曲线 $C:\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，直线 $l:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程;

（2）点 P 在直线 l 上，射线 OP 交曲线 C 于点 R，点 Q 在射线 OP 上，且满足 $5|OR|^2=4|OP||OQ|$，求点 Q 的轨迹的直角坐标方程.

解:(1)因为曲线 $C:\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数),

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$……………………………**1** 分

因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$……………………………………**1** 分

【备注 **1**】见"$x=\rho\cos\theta$"、"$y=\rho\sin\theta$"之一,可给 **1** 分。

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+\dfrac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$.

即 $\rho^2=\dfrac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$……………………………………………**1** 分(**3** 分)

因为直线 $l:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$ (t 为参数)则直线 $l:2x+y-5=0$…………**1** 分

∴直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-5=0$………………**1** 分(**5** 分)

(2)设点 Q 的极坐标为 $Q(\rho,\theta)$,……………………………………**1** 分

则 $|OR|^2=\dfrac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$, $|OP|=\dfrac{5}{2\cos\theta+\sin\theta}$ ………………………**1** 分(**7** 分)

【备注 **2**】见"$|OR|^2=\dfrac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$"、"$|OP|=\dfrac{5}{2\cos\theta+\sin\theta}$"之一,给 **1** 分。

代人 $5|OR|^2=4|OP|\cdot|OQ|$ 得 $\dfrac{5\times4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{4\times5}{2\cos\theta+\sin\theta}\cdot\rho$………**1** 分

即 $\rho^2=\dfrac{2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$,则 $4\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta$……**1** 分

所以点 Q 轨迹直角坐标方程为 $4x^2+y^2=2x+y$……………………**1** 分(**10** 分)

【备注 **3**】正确写出结果"$4x^2+y^2=2x+y$"且有一定的过程,即可给 **3** 分.

若结果不准确,就按标准给分.

23.已知a,b,c**均为正数，且**$a^2+2b^2+3c^2=4$**，证明:**

（1）若$a=c$**，则**$ab\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$**;**

（2）$a+2b+3c\leqslant2\sqrt{6}$**.**

证明:(1)∵ $a^2+2b^2+3c^2=4,a=c,\therefore 4a^2+2b^2=4$ **………………………1 分**

【备注 1】见“$4a^2+2b^2=4$**”、“** $2a^2+b^2=2$**”之一,给 1 分。**

∵ $4a^2+2b^2\geqslant2\cdot2a\cdot\sqrt{2}b$ **……………………………………………………2 分(3 分)**

【备注 2】见“$4a^2+2b^2\geqslant2\cdot2a\cdot\sqrt{2}b$**”、“** $2a^2+b^2\geqslant2\sqrt{2}ab$**”之一,可给 2 分。**

当且仅当$a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=1$**时取等号…………………………….………..1 分**

【备注 3】见“$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$**”、“** $b=1$**”之一,可给 1 分。**

∴ $4\geqslant2\cdot2a\cdot\sqrt{2}b$**,即** $ab\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ **……………………………………………...……1 分(5 分)**

(2)∵ a,b,c **均为正数,且** $a^2+2b^2+3c^2=4,\therefore$ **由柯西不等式得**

$\left(a^2+2b^2+3c^2\right)\left[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right]\geqslant(a+2b+3c)^2$ **…………………...…2 分(7 分)**

∴ $(a+2b+3c)^2\leqslant4\times6$ **……………………………………………...…1 分**

∴ $a+2b+3c\leqslant2\sqrt{6}$**,当且仅当** $a=b=c=\frac{\sqrt{6}}{3}$ **时取等号………………2 分(10 分)**

【备注 4】漏写“$a=b=c=\frac{\sqrt{6}}{3}$**”扣 1 分。**

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。