常州市教育学会学业水平监测

高三数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡指定位置上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题.本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\left\{x\mid \dfrac{x-1}{x-3}\le 0\right\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A．$(1,2)$　　B．$[1,2]$　　C．$[2,3)$　　D．$[2,3]$

【答案】C

【解析】$B=\{x\mid 1\le x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x\ge 2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid 2\le x<3\}$，选C.

2．命题“$\forall x>0, x>\dfrac{1}{x}$”的否定为

A．$\exists x>0, x\le\dfrac{1}{x}$　　B．$\exists x\le 0, x\le\dfrac{1}{x}$

C．$\forall x>0, x\le\dfrac{1}{x}$　　D．$\forall x\le 0, x\le\dfrac{1}{x}$

【答案】A

【解析】$\forall x>0, x>\dfrac{1}{x}$否定$\exists x>0, x\le\dfrac{1}{x}$，选A.

3．若复数 $z=\dfrac{a+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，则 $\bar{z}=$

A．-1　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$-a\mathrm{i}$　　D．$3\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】$z=\dfrac{(a+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{10}=\dfrac{3a+3+(9-a)\mathrm{i}}{10}$为纯虚数，$a=-1$，$z=\mathrm{i}$，

$\bar{z}=-\mathrm{i}$，选 B.

4．已知两个单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值为

A．$-\dfrac{4}{5}$　　B．$-\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

【答案】D

【解析】$(2\vec{b}-\vec{a})(2\vec{a}-\vec{b})=0$，$4\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2-2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，选 D.

5．已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$与以$\triangle ABC$的外接圆为底面的圆柱的体积相等，则正三棱柱与圆柱的侧面积的比值为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{2}{\pi}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．2

【答案】D

【解析】设$\triangle ABC$的边长为a，外接圆半径为r，令$AA_1=b$，$\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2r$，则$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b$，设圆柱的高为$h$，$V_{圆柱}=\dfrac{1}{3}a^2\pi h$，

$\therefore\dfrac{1}{3}a^2\pi h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b$，$\therefore b=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}h$，$S_{圆柱}=2\pi rh=2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}ah$，

$S_{棱柱}=3ab=3a\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}h$，$\dfrac{S_{棱柱}}{S_{圆柱}}=\dfrac{3a\cdot\dfrac{4a}{3\sqrt{3}}h}{2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\cdot h}=2$，选 D.

6．设$\mathrm{C}_n^0(x+2)^n-\mathrm{C}_n^1(x+2)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2(x+2)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots$

$+a_{n-1}x+a_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=$

A．$2^{n-1}-2$　　B．$2^{n-1}-1$　　C．2^n-2　　D．2^n-1

【答案】C

【解析】$x=1$ 时，$C_n^0 3^n-C_n^1 3^{n-1}+C_n^2 3^{n-2}-\cdots+(-1)^n C_n^n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，

$(3-1)^n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_n=2^n$，

$x=0$，$a_n=C_n^0 2^n-C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}-\cdots+(-1)^n C_n^n=(2-1)^n=1$，

$a_0=C_n^0=1$（左右两边 x^n 系数），$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2^n-2$，选 C.

7．下表提供了某厂进行技术改造后生产产品过程中记录的产量 x（单位：t）与相应的生产能耗 y（单位：t 标准煤）的几组对应数据：

x/t	3	4	5	6
y/t标准煤	2.5	3	4	4.5

已知该厂技术改造前 100t 产品的生产能耗为 90t 标准煤，试根据以上数据求出的线性回归方程，预测该厂技术改造后 100t 产品的生产能耗比技术改造前降低了

附：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n(\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，其中 $\overline{x},\overline{y}$ 为样本平均值.

A．19.65t 标准煤　B．29.65t 标准煤　C．70.35t 标准煤　D．90t 标准煤

【答案】A

【解析】$\overline{x}=4.5,\overline{y}=3.5$，$\hat{b}=\dfrac{3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5-4\times4.5\times3.5}{9+16+25+36-4\times(4.5)^2}=0.7$

$\hat{a}=3.5-0.7\times4.5=0.35$，$\hat{y}=0.7x+0.35$，$x=100,\hat{y}=70.35$，

$90-70.35=19.65$，选 A.

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|e^x-1\right|,x\le1,\\ \dfrac{\ln x+x}{x-1},x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=1$ 解的个数为

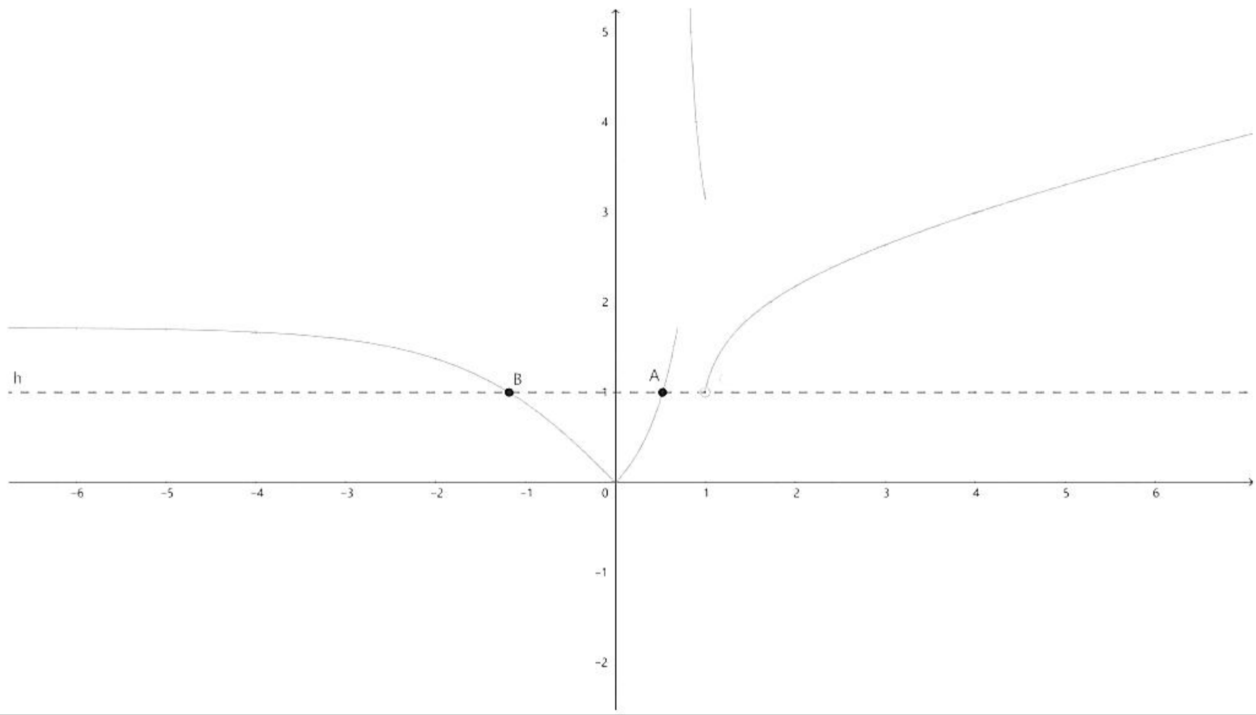
A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】A

【解析】$x>1$时，$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)(x-1)-(\ln x+x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+x-1-\ln x-x}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{-\dfrac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}<0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$↘，$\ln x>-1$，$\therefore\dfrac{x+\ln x}{x-1}>1$，$f(f(x))=1$，

则$f(x)=\ln 2$有两个根，选 A.



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．某次测试，经统计发现测试成绩服从正态分布，函数$P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\times 10}\mathrm{e}^{-\frac{(x-90)^2}{200}}(x\in\mathbf{R})$的图象为其正态密度曲线，则

A．这次测试的平均成绩为90

B．这次测试的成绩的方差为10

C．分数在110分以上的人数与分数在80分以下的人数相同

D．分数在120分以上的人数与分数在60分以下的人数大致相同

【答案】AD

【解析】$P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\times 10}e^{-\frac{(x-90)^2}{200}}$关于$x=90$对称，$\therefore$平均数为90，A对，C错，D对.

$\sigma=10$，方差为100，B错，选AD.

10．已知双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别是$F_1,F_2$，点$P$在双曲线的右支上，则

A．若直线PF_1的斜率为k，则$|k|\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right)$

B．使得$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形的点P有且仅有四个

C．点P到两条渐近线的距离乘积为$\dfrac{144}{25}$

D．已知点$Q(7,5)$，则$|F_2P|+|PQ|$的最小值为5

【答案】ABC

【解析】$F_1(-5,0)$，设$P(x_0,y_0)$，$k_{PF_1}=\dfrac{y_0}{x_0+5}$，$k^2=\dfrac{y_0^2}{(x_0+5)^2}=\dfrac{\frac{9}{16}x^2-9}{(x_0+5)^2}$，

令$x_0+5=t,t\geq 9$，$k^2=\dfrac{\frac{9}{16}(t-5)^2-9}{t^2}=\dfrac{\frac{9}{16}(t^2-10t+25)-9}{t^2}$

$=\dfrac{\frac{9}{16}t^2-\frac{45}{8}t+\frac{81}{16}}{t^2}=\dfrac{81}{16}\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{45}{8}\dfrac{1}{t}+\dfrac{9}{16}$，

令$\dfrac{1}{t}=m,m\in\left(0,\dfrac{1}{9}\right]$，$k^2=\dfrac{81}{16}m^2-\dfrac{45}{8}m+\dfrac{9}{16}$在$\left(0,\dfrac{1}{9}\right]\searrow$，

$\therefore k^2\in\left[0,\dfrac{9}{16}\right)$，$\therefore |k|\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right)$，A对.

若$PF_2=F_1F_2=10$，则满足条件的P有两个；

若$PF_1=F_1F_2=10$，则满足条件的P有两个.

$\therefore$满足$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形的P有4个，B对.

渐近线：$y=\pm\frac{3}{4}x$ 即 $3x\pm4y=0$ ，

$d_1d_2=\frac{|3x_0+4y_0|}{5}\cdot\frac{|3x_0-4y_0|}{5}=\frac{|9x_0^2-16y_0^2|}{25}=\frac{144}{25}$ ，C 对，选 ABC.

11．已知函数 $f(x)=2x-\tan x$ ，则

A．函数 $f(x)$ 不是周期函数

B．函数 $f(x)$ 的图象只有一个中心对称点

C．函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

D．曲线 $y=f(x)\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 只有一条过点 $(1,0)$ 的切线

【答案】AD

【解析】$y=2x$ 不是周期函数，则 $f(x)$ 不是周期函数，A 对.

对于 B，法一：$\because g(x)=2x$ 关于 $\left(\frac{k\pi}{2},k\pi\right)$ 中心对称，$h(x)=\tan x$ 关于 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$ 中心对称，

$\therefore f(x)=g(x)-h(x)$ 关于 $\left(\frac{k\pi}{2},k\pi\right)$ 中心对称.

注释：若 $f(x)$ 关于 (m,n) 中心对称，$g(x)$ 关于 (m,p) 中心对称，则 $f(x)+g(x)$ 关于 $(m,n+p)$ 中心对称.

法二：设 $f(x)$ 关于 (m,n) 中心对称，$\therefore f(x)+f(2m-x)=2n$

$\Rightarrow 2x-\tan x+2(2m-x)-\tan(2m-x)=2n$ ，$\therefore 4m-[\tan x+\tan(2m-x)]=2n$ ，

令 $2m=k\pi,\therefore n=k\pi$ ，$\therefore f(x)$ 关于 $\left(\frac{k\pi}{2},k\pi\right)$ 中心对称，故 B 错.

$f'(x)=2-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}<0$ ，$\cos^2 x<\frac{1}{2}$ ，$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3}{4}\pi$ ，$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ ，

$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)$，C 错.

设切点$(x_0,2x_0-\tan x_0)$，$y'=2-\frac{1}{\cos^2 x}$，$k=2-\frac{1}{\cos^2 x_0}$，

$y-(2x_0-\tan x_0)=\left(2-\frac{1}{\cos^2 x_0}\right)(x-x_0)$过$(1,0)$，

$-2x_0+\tan x_0=\left(2-\frac{1}{\cos^2 x_0}\right)(1-x_0)$，$\sin x_0\cos x_0=2\cos^2 x_0-1+x_0$，

$\frac{1}{2}\sin 2x_0-\cos 2x_0-x_0=0$，令$2x_0=t,t\in(-\pi,\pi)$，$g(t)=\frac{1}{2}\sin t-\cos t-\frac{1}{2}t$，

$g'(t)=\frac{1}{2}\cos t+\sin t-\frac{1}{2}=0,t=0$，$g(t)$在$(-\pi,0)\searrow,(0,\pi)\nearrow$，$g(t)_{\min}=g(0)=-1$，

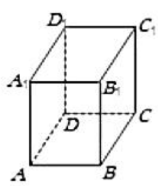
$g(-\pi)=1+\frac{\pi}{2}>0,g(\pi)<0$，$\therefore g(t)$在$(-\pi,\pi)$有且仅有一个零点，D 对，选 AD.

12．棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点都在半径为R的球面上，球面上点P与球心O分别位于平面$ABCD$的两侧，且四棱锥$P-ABCD$是侧棱长为l的正四棱锥.记正四棱锥$P-ABCD$的侧棱与直线AB所成的角为α，与底面$ABCD$所成的角为β，则

A．$15°<\alpha<45°$ B．$15°<\beta<45°$ C．$R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D．$l=\frac{4}{5}a$

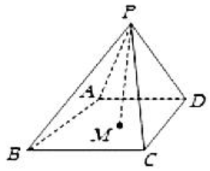
【答案】BC

【解析】方法一：$2R=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$，$\therefore R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，C 对.



设$ABCD$外接圆圆心为M，$OM=\frac{1}{2}a$，$PM=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a$，

$l=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right)^2}\neq\frac{4}{5}a$，D 错.

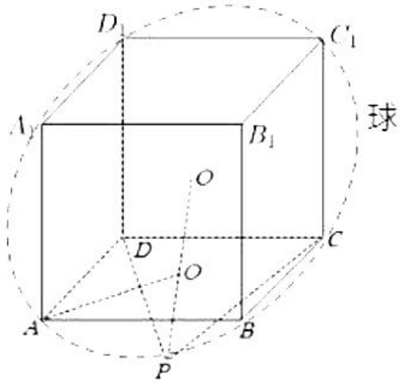


$PA=PB=l$ ，$AB=a$ ，$\cos\alpha=\dfrac{a^2+l^2-a^2}{2al}=\dfrac{a^2}{2al}=\dfrac{a}{2l}=\dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\alpha>45^\circ$ ，A 错，选 BC.

方法二：由题意知$\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=R$ ，C 正确.

设O在底面$ABCD$的射影为O' ，延长OO'交球O于点P ，



$\therefore\beta=\angle PAO'$ ，$\tan\beta=\dfrac{PO'}{O'A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{a}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<\tan\beta<1$ ，

$\therefore 15^\circ<\beta<45^\circ$ ，B 正确.

$PA=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}a$ ，

$\cos\alpha=\dfrac{PA^2+a^2-PB^2}{2\cdot PA\cdot AB}=\dfrac{a^2}{2\cdot PA\cdot a}=\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}$ ，

而$\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\alpha>45^\circ$ ，A 错.

对于 D，$l=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}a \neq \frac{4}{5}a$ ，D 错.选：BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．数据$23,76,45,37,58,16,28,15,53,24,42,36$的25百分位数是__________.

【答案】23.5

【解析】$15,16,23,24,28,36,37,42,45,53,58,76$，共12个数据，$12\times 25\%=3$.

第$3,4$个数据分别为$23,24$，$\dfrac{23+24}{2}=23.5$.

14．在平面直角坐标系xOy中，点P到直线$x=-2$与到点$F(2,0)$的距离相等，点Q在圆$(x-10)^2+y^2=25$上，则$|PQ|$的最小值为__________.

【答案】3

【解析】P点轨迹$y^2=8x$，圆$(x-10)^2+y^2=25$，圆心$M(10,0)$，

$PM=\sqrt{(x-10)^2+y^2}=\sqrt{x^2-20x+100+8x}=\sqrt{x^2-12x+100}\geq 8$，

$\therefore PQ\geq 8-5=3$，即$PQ_{\min}=3$.

15．已知函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+x^2$，则不等式$f(x+1)+f(x-1)<2x^2+2$的解集为__________.

【答案】$(-\infty,0)$

【解析】$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+x^2$，$g(x)=f(x)-x^2=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$为奇函数，

$g'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}>0$，$g(x)$在$\mathbf{R}$上$\nearrow$，

$f(x+1)=g(x+1)+(x+1)^2$，$f(x-1)=g(x-1)+(x-1)^2$，

$f(x+1)+f(x-1)=g(x+1)+g(x-1)+2x^2+2<2x^2+2$，

$\therefore g(x+1)+g(x-1)<0$，$g(x+1)<-g(x-1)$，$g(x+1)<g(1-x)$，

$\therefore x+1<1-x$，则$x<0$.

16．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$n^2a_{n+1}=2(n+1)^2a_n$.记$b_n=\frac{1}{2}a_{n+1}-a_n$，则$\{a_n\}$的通项公式

$a_n=$__________；$\{b_n\}$的前n项和$T_n=$__________.

【答案】$n^2\cdot 2^{n-1}$；$(2n-1)\cdot 2^n+1$

【解析】方法一：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}$，$\begin{cases}\frac{a_2}{a_1}=2\cdot\frac{2^2}{1^2}\\ \frac{a_3}{a_2}=2\cdot\frac{3^2}{2^2}\\ \quad\vdots\\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=2\cdot\frac{n^2}{(n-1)^2}\end{cases}$，$\therefore\frac{a_n}{a_1}=2^{n-1}\cdot\frac{n^2}{1^2}$，

$\therefore a_n=n^2\cdot 2^{n-1}$，$b_n=\frac{1}{2}(n+1)^2 2^n-n^2\cdot 2^{n-1}=(2n+1)2^{n-1}$，

$T_n=3\times 2^0+5\times 2^1+7\times 2^2+\cdots+(2n-1)2^{n-2}+(2n+1)2^{n-1}$，①

$2T_n=3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n-1)2^{n-1}+(2n+1)2^n$，②

①−②，$-T_n=3+2\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+2\times 2^{n-1}-(2n+1)2^n$

$-T_n=3+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)2^n$

$-T_n=3+4(2^{n-1}-1)-(2n+1)2^n$，

$-T_n=-1+(1-2n)2^n$，

$T_n=1+(2n-1)2^n$

方法二：

记$\frac{a_n}{n^2}=c_n$，由$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=2\cdot\frac{a_n}{n^2}$知$c_{n+1}=2c_n$，$c_1=1\neq 0$，$\therefore\{c_n\}$成首项为1，公比为2的等比数列，$c_n=2^{n-1}$，$\therefore a_n=n^2\cdot 2^{n-1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{2}\cdot(n+1)^2\cdot 2^n-n^2\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}(2n+1)$，

$\therefore T_n=3\cdot 2^0+5\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-2}+(2n+1)\cdot 2^{n-1}$，①

$2T_n=3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-2}+(2n-1)\cdot 2^{n-1}+(2n+1)\cdot 2^n$，②

①−②$\Rightarrow -T_n=3+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n+1)\cdot 2^n$

$=3+\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\cdot 2^n=(1-2n)\cdot 2^n-1$，

$\therefore T_n=(2n-1)\cdot 2^n+1$.

应填：$n^2\cdot 2^{n-1}$；$(2n-1)\cdot 2^n+1$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）设甲袋中有3个白球和4个红球，乙袋中有1个白球和2个红球.现从甲袋中任取2个球放入乙袋，再从乙袋中任取2个球.

（1）记从甲袋中取出的2个球中恰有X个白球，求随机变量X的概率分布和期望；

（2）求从乙袋中取出的2个球中恰有1个红球的概率.

【解析】

（1）X的所有可能取值为$0,1,2$，

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{4}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$，

$\therefore X$的分布列如下

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

X的数学期望$E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$.

或$X\sim H(2,3,7)$的超几何分布，$E(X)=\dfrac{nM}{N}=\dfrac{6}{7}$（秒杀）.

（2）若从甲袋中取出2红，则乙袋中取出2球恰有1个红球概率$P_1=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}\cdot\dfrac{C_4^1\cdot C_1^1}{C_5^2}=\dfrac{4}{35}$，

若从甲袋中取出2白，则乙袋中取出2球恰有1个红球概率$P_2=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}\cdot\dfrac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{35}$，

若从甲袋中取出1红1白，则乙袋中取出2球恰有1个红球概率$P_3=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}\cdot\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{12}{35}$，

$\therefore$乙袋中取出2球恰有1红的概率$P=\dfrac{19}{35}$.

18 .（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$a_1+a_2=b_3$，$15a_1+a_9=b_6$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\log_2 b_{n+1}$，求数列$\left\{\dfrac{c_n^2}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

【解析】

（1）设$\{a_n\}$公差为d，$\{b_n\}$公比为q，

$$\therefore\begin{cases}1+1+d=q^2\\15+1+8d=q^5\end{cases}\Rightarrow q^5-8q^2=0，q=2，d=2，$$

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$.

（2）$c_n=\log_2 2^n=n$，$\therefore \dfrac{c_n^2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{\frac{1}{4}(4n^2-1)+\frac{1}{4}}{4n^2-1}$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)，$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4}+\frac{n}{4(2n+1)}=\frac{n^2+n}{4n+2}.$$

19 .（12 分）已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，AB边上的高CD为1，且$c^2=ab\cos C$.

（1）求证：$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{1}{\tan C}$；

（2）求AB的最小值.

【解析】

（1）由题意知$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}c\cdot 1=\dfrac{1}{2}ab\sin C\Rightarrow ab\sin C=c$

$\because c^2=ab\cos C$，$\therefore \sin^2 C=\sin A\sin B\cos C\Rightarrow \dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$，

$\therefore \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$，

$\therefore \dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{1}{\tan C}$，证毕！

（2）由$\begin{cases}c^2=ab\cos C\\ ab\sin C=c\end{cases}\Rightarrow c=\dfrac{1}{\tan C}$，且$a^2+b^2-2ab\cos C=ab\cos C$，

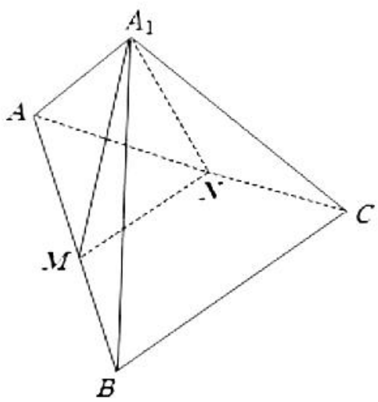
$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2}{3ab}\geq\dfrac{2ab}{3ab}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \tan C\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore c\geq\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore (AB)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

20.（12分）如图，在边长为4的等边三角形ABC中，平行于BC的直线分别交线段AB,AC于点M,N.将$\triangle AMN$沿着MN折起至$\triangle A_1MN$，使得二面角A_1-MN-B是直二面角.

（1）若平面$A_1MN\cap$平面$A_1BC=l$，求证：$l\,//\,BC$；

（2）若三棱锥A_1-AMN的体积为1，求二面角$N-A_1M-B$的正弦值.



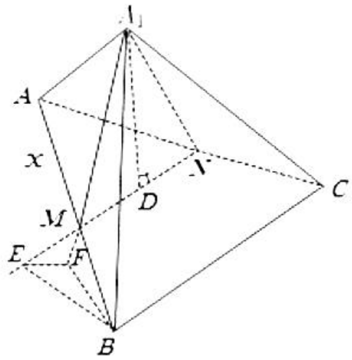
【解析】

（1）证明：$\because BC\,//\,MN$，$BC\not\subset$平面A_1MN，$MN\subset$平面A_1MN，

$\therefore BC\,//$平面A_1MN，又$\because BC\subset$平面A_1BC，平面$A_1BC\cap$平面$A_1MN=l$，

$\therefore l\,//\,BC$.

（2）设$AM=x$，过A_1作$A_1D\perp MN$于点D，



$\because$二面角A_1-MN-B为直二面角，$\therefore A_1D\perp$平面ABC，

$\therefore V_{A_1-AMN}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=1\Rightarrow x=2$，$\therefore M,N$分别为$AB,AC$中点，

过B作$BE\perp MN$于点E，$\therefore BE\perp$平面A_1MN，

过E作$EF\perp A_1M$于点F，连接BF，

$\therefore\angle BFE$即为二面角$N-A_1M-B$的平面角α的补角，

且$BE=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，$EM=1$，$EF=1\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore BF=\sqrt{3+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\angle BFE=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{15}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

21.（12分）已知点$P(2,-1)$在椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，$C$的长轴长为$4\sqrt{2}$，直线$l:y=kx+m$与$C$交于$A,B$两点，直线 PA,PB的斜率之积为$\dfrac{1}{4}$.

（1）求证：k为定值；

（2）若直线l与x轴交于点Q，求$|QA|^2+|QB|^2$的值.

【解析】

解析一：锤子数学精彩秒杀

（1）由网课“可悟”课程“定海神”知

$AB:2y(k_{PA}+k_{PB})-x(k_{PA}+k_{PB})+4=0$，$\therefore k=\dfrac{1}{2}$.

（2）设$Q(n,0)$，由“春季冲刺网课，解几非常规手段”知

$$l:\begin{cases}x=n+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t\\ y=0+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t\end{cases}\text{代入}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\Rightarrow n^2+\frac{4}{5}t^2+\frac{4n}{\sqrt{5}}t+\frac{4}{5}t^2=8$$

$$QA^2+QB^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=\left(-\frac{\frac{4n}{\sqrt{5}}}{\frac{8}{5}}\right)^2-2\cdot\frac{n^2-8}{\frac{8}{5}}$$

$$=\frac{5}{4}n^2-\frac{5}{4}n^2+10=10.$$

解析二：

（1）由题意知$\begin{cases}2a=4\sqrt{2}\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$，$\therefore$椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

将椭圆平移至$\dfrac{(x+2)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$即$x^2+4y^2+4x-8y=0$，

此时P点平移至$P'(0,0)$，A,B分别平移至$A'(x_1,y_1),B'(x_2,y_2)$，

设直线$A'B'$方程为$tx+ny=1$代入椭圆$\Rightarrow x^2+4y^2+(4x-8y)(tx+ny)=0$，

整理得$(8n-4)y^2+(8t-4n)xy-(4t+1)x^2=0$，两边同除以$x^2$

$$\Rightarrow(8n-4)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2+(8t-4n)\cdot\frac{y}{x}-(4t+1)=0,$$

$\therefore k_{P'A'}\cdot k_{P'B'}=k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{1}{4}$且$\dfrac{y_1}{x_1},\dfrac{y_2}{x_2}$可看作关于$x$的一元二次方程，

$(8n-4)x^2+(8t-4n)x-(4t+1)=0$的两不等实根，

$\therefore\dfrac{-(4t+1)}{8n-4}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore 4t=-2n$，即$n=-2t$，

$\therefore$直线$A'B'$方程为$tx-2ty=1(t\neq0)$，$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2t}$，

$\therefore A'B'$的斜率为定值$\dfrac{1}{2}$，即k的定值$\dfrac{1}{2}$.

（2）设$A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$，

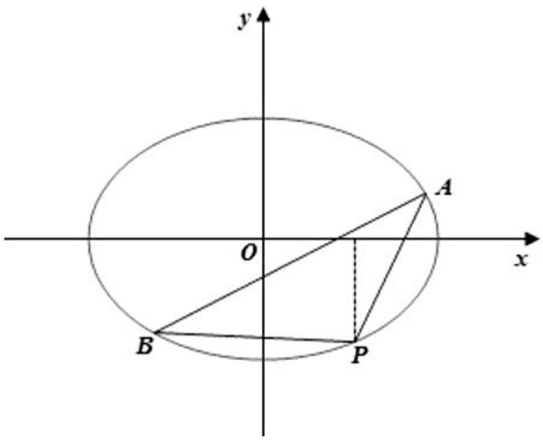
$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+m\\x^2+4y^2=8\end{cases}\Rightarrow 8y^2-8my+4m^2-8=0$$，即$2y^2-2my+m^2-2=0,\Delta>0$，

$$\therefore |QA|^2+|QB|^2=(\sqrt{1+4}\cdot y_3)^2+(\sqrt{1+4}y_4)^2=5(y_3^2+y_4^2)=5[(y_3+y_4)^2-2y_3y_4]$$

$$=5\left(m^2-2\cdot\frac{m^2-2}{2}\right)=10.$$

解析三：

（1）椭圆：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(2,-1)$，



$$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=8\end{cases}\Rightarrow x^2+4(kx+m)^2=8$$，

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-8=0$，$\Delta>0$，

$$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1+1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2+1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m+1}{x_1-2}\cdot\frac{kx_2+m+1}{x_2-2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4(kx_1+m+1)(kx_2+m+1)=(x_1-2)(x_2-2)$$

$$\therefore 4[k^2x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2]=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$$

$$\therefore (4k^2-1)x_1x_2+[4k(m+1)+2](x_1+x_2)+4(m+1)^2-4=0$$，

$$(4k^2-1)\cdot\frac{4m^2-8}{1+4k^2}+(4km+4k+2)\cdot\frac{-8km}{1+4k^2}+4m^2+8m=0$$，

$$\therefore (4k^2-1)(m^2-2)-2km(4km+4k+2)+(m^2+2m)(1+4k^2)=0$$，

$\therefore 4k^2m^2-8k^2-m^2+2-8k^2m^2-8k^2m-4km+m^2+4k^2m^2+2m+8k^2m=0$ ，

$\therefore 8k^2+4km-2m-2=0$ ，$(2k+1)(2k-1)+m(2k-1)=0$ ，$\therefore (2k-1)(2k+1+m)=0$ ，

若$2k+1+m=0$ ，则l方程：$y=kx-2k-1$恒过$P(2,-1)$ ，舍去，

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$为定值.

22.（12 分）已知函数$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+1-a^2,a\in\mathbf{R}$.

（1）若$a=1$ ，求函数$f(x)$的单调区间；

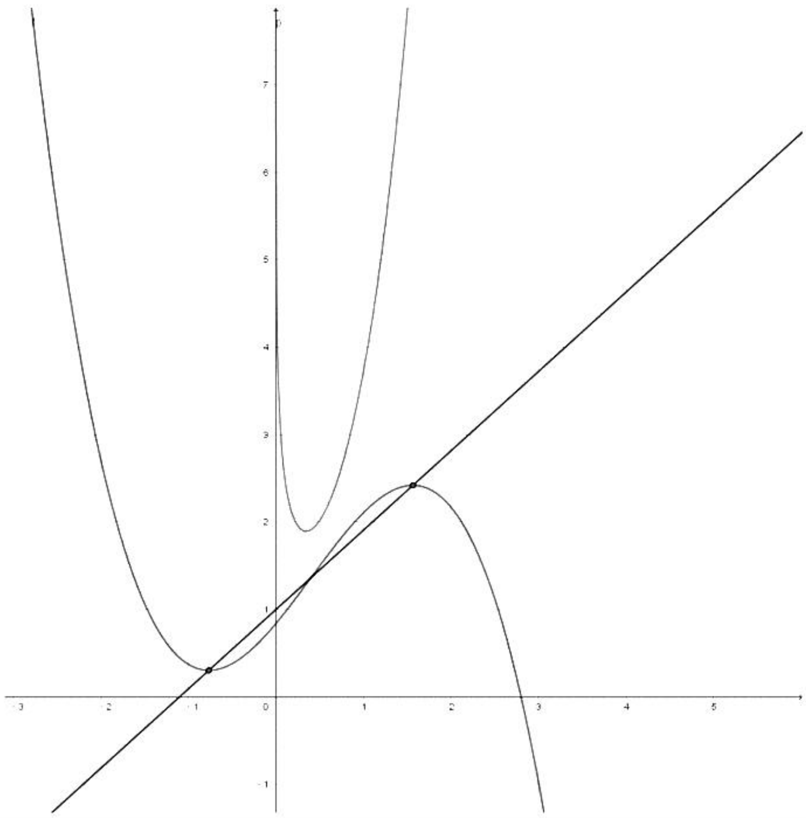
（2）设函数$f(x)$有两个极值点x_1,x_2 ，若过点$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$的直线恒在函数$g(x)=x\cdot \mathrm{e}^x-\ln x+x$图象的下方，求实数$a$的取值范围..

【解析】

（1）当$a=1$时，$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x$ ，$f'(x)=-x^2+2x+3$ ，

令$-x^2+2x+3>0\Rightarrow -1<x<3$ ，令$-x^2+2x+3<0\Rightarrow x<-1$或$x>3$ ，

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$(-1,3)$ ，递减区间为$(-\infty,-1),(3,+\infty)$.



（2）方法一：锤子数学"精彩秒杀"：

由"导数觉醒"课程，"三次函数推论 7"知，

过$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$方程为$3y-(2a^2+6a)x-3=0$，

即$y=\left(\dfrac{2}{3}a^2+2a\right)x+1$，而$\left(\dfrac{2}{3}a^2+2a\right)x+1<x\cdot e^x-\ln x+x,\forall x>0$恒成立，

即$x\cdot e^x-\ln x+x-\left(\dfrac{2}{3}a^2+2a\right)x-1>0,\forall x>0$恒成立，

而由常用放缩$x\cdot e^x\geq x+\ln x+1$知

原式$\geq 2x-\left(\dfrac{2}{3}a^2+2a\right)x>0,\forall x>0$恒成立，

$\therefore \dfrac{2}{3}a^2+2a<2$，结合$f'(x)$有两零点知

$\therefore a\in\left(-\dfrac{3+\sqrt{21}}{2},-3\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\right)$.

方法二：（2）$f'(x)=-x^2+2ax+3a$，令$-x^2+2ax+3a=0$.

$\because f(x)$有两个极值点，$\therefore \Delta=4a^2+12a>0\Rightarrow a<-3$或$a>0$，其中$\begin{cases}x_1+x_2=2a\\x_1x_2=-3a\end{cases}$.

过$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$的直线方程为$y=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x+\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{1}{3}x_2^3+ax_2^2+3ax_2-\left(-\frac{1}{3}x_1^3+ax_1^2+3ax_1\right)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)+a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+3a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=-\frac{1}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+a(x_1+x_2)+3a=-\frac{1}{3}[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]+a(x_1+x_2)+3a$$

$=-\frac{1}{3}(4a^2+3a)+2a^2+3a=\frac{2}{3}a^2+2a$

且$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}=\frac{x_2\left[-\frac{1}{3}x_1^3+ax_1^2+3ax_1+1-a^2\right]-x_1\left[-\frac{1}{3}x_2^3+ax_2^2+3ax_2+1-a^2\right]}{x_2-x_1}$

$=\frac{-\frac{1}{3}x_1^3x_2+\frac{1}{3}x_1x_2^3+ax_1^2x_2-ax_1x_2^2+(1-a^2)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$

$=\frac{\frac{1}{3}x_1x_2(x_2+x_1)(x_2-x_1)-ax_1x_2(x_2-x_1)+(1-a^2)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$

$=\frac{1}{3}x_1x_2(x_1+x_2)-ax_1x_2+1-a^2$

$=\frac{1}{3}\cdot(-3a)\cdot 2a-(-3a^2)+1-a^2=1$

$\therefore$过$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$的直线方程为$y=\left(\frac{2}{3}a^2+2a\right)x+1$.

$\therefore\left(\frac{2}{3}a^2+2a\right)x+1<xe^x-\ln x+x$对$\forall x>0$恒成立，

$\therefore\frac{2}{3}a^2+2a<\left(\frac{xe^x-\ln x+x-1}{x}\right)_{\min}$，

而$\frac{xe^x-\ln x+x-1}{x}=\frac{e^{x+\ln x}-\ln x+x-1}{x}\geq\frac{x+\ln x+1-\ln x+x-1}{x}=2$，

当且仅当$x+\ln x=0$时取“=”，令$\varphi(x)=x+\ln x$，

$\because\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0,\varphi(1)=1>0$，

$\therefore$存在唯一的$x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$使$\varphi(x_0)=0$，故可取“=”，

$\therefore\frac{2}{3}a^2+2a<2\Rightarrow\frac{-3-\sqrt{21}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$，

$\therefore a$的取值范围为$\left(-\frac{3+\sqrt{21}}{2},-3\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。