天一大联考
2022—2023学年高中毕业班阶段性测试(一)
理科数学·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 $A\cap B=\{0,1,3\}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的相关概念及运算.

解析 $|z|=\dfrac{|1-i|}{|3+4i|}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

3. 答案 C

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-2-t,3)\cdot(-6,-2)=(-2-t)(-6)+3(-2)=12+6t-6=0$,解得$t=-1$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查双曲线的基本性质.

解析 由已知得双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{\frac{1}{a}}-y^2=1$,其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{a}x$.因为直线$x=4y+7$与双曲线的一条渐近线平行,则这条渐近线的斜率为$\dfrac{1}{4}$,即$\sqrt{a}=\dfrac{1}{4}$,所以$a=\dfrac{1}{16}$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查等差数列的基本运算.

解析 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.由$a_1+a_3+a_8=a_4-3d+a_4-d+a_4+4d=3a_4=9$,解得$a_4=3$,故$a_1+a_4+a_5+a_6=a_4-3d+a_4+a_4+d+a_4+2d=4a_4=12$.

6. 答案 B

命题意图 本题考查算法与框图的基本逻辑结构.

解析 S,k的值的变化如下表所示:

循环次数	0	1	2	3	4	5
S	1	7	18	39	80	161
k	5	4	3	2	1	0

当$k=0$时,循环终止条件$k<n$成立,此时输出$S=161$.

7. 答案 A

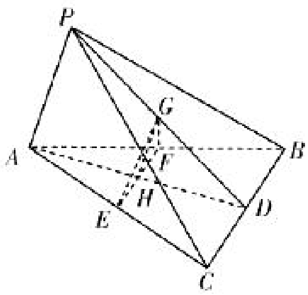
命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q. 由$\begin{cases} a_5=9, \\ a_3a_8=81a_2 \end{cases}$得$\begin{cases} a_1q^4=9, \\ a_1q^2\cdot a_1q^7=81a_1q, \end{cases}$解得$\begin{cases} q^2=3, \\ a_1=1, \end{cases}$则$a_2a_6=a_1^2q^6=27$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查线面位置关系的判断.

解析 由$EF/\!/BC$可得$BC/\!/$平面EFG,故A正确;如图,连接AD与EF交于点H,易知H是AD的中点,连接GH,则$GH/\!/PA$,所以$PA/\!/$平面EFG,故B正确;因为$PB=PC$,所以$PD\perp BC$,所以$PD\perp EF$,又$PD\perp EG$,所以$PD\perp$平面EFG,故D正确. 结论C不一定正确.



9. **答案** A

命题意图 本题考查事件与概率的有关概念以及条件概率的计算.

解析 因为所有基本事件的个数为$3^3=27$,三次抽到的号码之和为15,包括三次号码都不一样,分别是4,5,6,基本事件的个数为A_3^3,三次号码都一样,全是5,基本事件的个数为1,故事件A包含的基本事件的个数为$A_3^3+1=7$,事件AB包含的基本事件的个数为$A_3^3=6$,所以$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{6}{27}}{\frac{7}{27}}=\dfrac{6}{7}$.

10. **答案** B

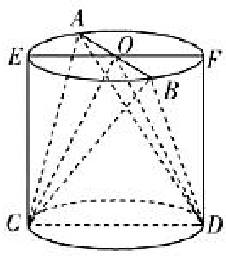
命题意图 本题考查函数的奇偶性. 考后对答案，公众号《愚公文化》

解析 由题可知$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{9x^2+1}-3x)+\ln(\sqrt{9x^2+1}+3x)+x-x+1+1=\ln(9x^2+1-9x^2)+0+2=2$,因为$a+b=2\ 023$,所以$(a+2)+(b-2\ 025)=0$,所以$f(b-2\ 025)+f(a+2)=2$.

11. **答案** D

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征以及异面直线所成的角.

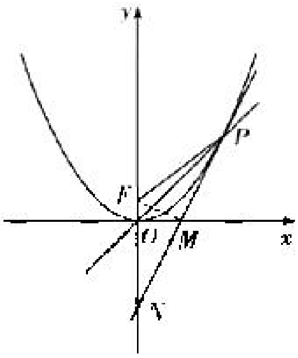
解析 如图所示,EF是上底面的与CD平行的直径,O是上底面的圆心. 设异面直线AB与CD所成角为θ,则$\angle AOE=\angle BOF=\theta$. 由已知得圆柱的底面半径为1,则点$A,B$到平面$CDFE$的距离均为$\sin\theta$,四面体$ABCD$的体积为$2\times\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle OCD}\times\sin\theta=\dfrac{4\sin\theta}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$,所以$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,又因为$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.



12. **答案** C

命题意图 本题考查抛物线的性质，抛物线与直线的位置关系.

解析 如图，设直线 PN 与 x 轴的交点为 M，连接 FM. 设 $P\left(a,\frac{a^2}{2p}\right)(a>0)$，由 $y=\frac{x^2}{2p}$，得 $y'=\frac{x}{p}$，所以 C 在点 P 处的切线方程为 $y-\frac{a^2}{2p}=\frac{a}{p}(x-a)$，从而 $M\left(\frac{a}{2},0\right)$，$N\left(0,-\frac{a^2}{2p}\right)$，根据抛物线的定义，得 $|PF|=\frac{a^2}{2p}+\frac{p}{2}$，又 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FN|=\frac{p}{2}-\left(-\frac{a^2}{2p}\right)=\frac{a^2}{2p}+\frac{p}{2}$，所以 $|PF|=|FN|$. 由 $P\left(a,\frac{a^2}{2p}\right)$，$M\left(\frac{a}{2},0\right)$，$N\left(0,-\frac{a^2}{2p}\right)$，得 M 是 PN 的中点，则 $MF\perp PN$，又 $\angle FPN=30^\circ$，所以 $|PF|=2|FM|$，又 $|FM|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+p^2}}{2}$，所以 $\frac{a^2}{2p}+\frac{p}{2}=\sqrt{a^2+p^2}$，化简得 $(a^2-3p^2)(a^2+p^2)=0$，所以 $a^2=3p^2$，则 $P\left(\sqrt{3}p,\frac{3p}{2}\right)$，则 $k_{OP}=\frac{\frac{3p}{2}}{\sqrt{3}p}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. **答案** 16

命题意图 本题考查基本不等式的应用.

解析 由题意得 $a+b=4$，$a>0$，$b>0$，则 $\frac{4}{a}+\frac{36}{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a}+\frac{36}{b}\right)(a+b)=10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=16$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$ 且 $a+b=4$，即 $a=1$，$b=3$ 时取等号，因此 $\frac{4}{a}+\frac{36}{b}$ 的最小值为16.

14. **答案** 24

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 圆 $C:(x+1)^2+y^2=m+1$ 的圆心坐标为 $(-1,0)$，圆心到直线 $l:x-\sqrt{3}y+9=0$ 的距离 $d=\frac{|1\times(-1)+(-\sqrt{3})\times 0+9|}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}}=4$，则圆 C 的半径 $r=\sqrt{4^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2}=5$，即 $m+1=5^2=25$，解得 $m=24$.

15. **答案** $\left(\frac{4}{3},\frac{16}{3}\right]$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上有且仅有1个零点，所以 $0<\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，解得 $\frac{4}{3}<\omega\leqslant\frac{16}{3}$，即 $\omega\in\left(\frac{4}{3},\frac{16}{3}\right]$.

16. **答案** $(0,2)$

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 由 $f(x)e^x+f'(x)e^x=2(x-a)$ 可知 $[f(x)e^x]'=2(x-a)$，故 $f(x)e^x=x^2-2ax+c$，其中 c 为常数. 因此 $f(x)=\dfrac{x^2-2ax+c}{e^x}$，又 $f(0)=1$，则 $c=1$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2-2ax+1}{e^x}$，$f'(x)=-\dfrac{(x-1)[x-(2a+1)]}{e^x}$. 设 $g(x)=(x-1)[x-(2a+1)]$. 因为 $f(x)$ 在 $(1,5)$ 上有极值点，所以 $f'(x)$ 在 $(1,5)$ 上有变号的零点，即 $g(x)$ 在 $(1,5)$ 上有变号的零点. 因为 $g(1)=0$，$g(2a+1)=0$，所以 $1<2a+1<5$，解得 $0<a<2$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由 $5a=\dfrac{5b}{\cos C}+\dfrac{3c}{\cos C}$，得 $5a\cos C=5b+3c$，

由正弦定理得 $5\sin A\cos C=5\sin B+3\sin C$. ……………………（2 分）

因为 $B=\pi-(A+C)$，所以 $5\sin A\cos C=5\sin(A+C)+3\sin C$，……………………（3 分）

所以 $5\sin A\cos C=5\sin A\cos C+5\sin C\cos A+3\sin C$. ……………………（4 分）

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $5\cos A+3=0$，得 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$. ……………………（6 分）

(Ⅱ)由 $\sin C:\sin B=1:5$ 及正弦定理得 $c:b=1:5$，……………………（8 分）

所以 $b=10$. ……………………（9 分）

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $a^2=10^2+2^2-2\times 10\times 2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=128$，……………………（11 分）

解得 $a=8\sqrt{2}$. ……………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明，利用空间向量求空间角.

解析 (Ⅰ)如图，取 B_1C_1 的中点 F，BE 的中点 G，连接 FG，DG，A_1F.

则 $FG\parallel CC_1\parallel AA_1$，且 $FG=\dfrac{C_1E+BB_1}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$，……………………（1 分）

所以 $FG\parallel A_1D$ 且 $FG=A_1D$，所以四边形 A_1DGF 为平行四边形，所以 $A_1F\parallel DG$. ……………………（2 分）

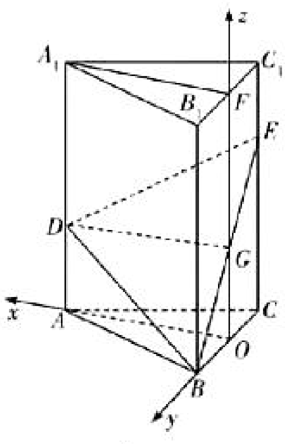
因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等边三角形，F 是 B_1C_1 的中点，所以 $A_1F\perp B_1C_1$. ……………………（3 分）

又因为平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=B_1C_1$，$A_1F\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $A_1F\perp$ 平面 BCC_1B_1，……………………（4 分）

所以 $DG\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……………………（5 分）

又 $DG\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……………………（6 分）



(Ⅱ)设 BC 的中点为 O,连接 OA,OC,易知 O,C,F 三点共线.在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,可得 $AO\perp BC$,所以 OA,OB,OF 两两互相垂直.

分别以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系. ……………… (7 分)

则 $B(0,1,0),E(0,-1,2),D(\sqrt{3},0,1),A(\sqrt{3},0,0),C(0,-1,0)$.

所以 $\overrightarrow{BE}=(0,-2,2),\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-1,1),\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},-1,0)$. ……………… (8 分)

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2y+2z=0,\\ \sqrt{3}x-y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得到平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ……………… (10 分)

设直线 AC 与平面 BDE 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}\right|=\left|\dfrac{(0,1,1)\cdot(-\sqrt{3},-1,0)}{\sqrt{2}\times2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

所以直线 AC 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查概率的计算与随机变量的期望.

解析 (Ⅰ)由题意,这两道题小明全部选对.

小明一道题全部选对的概率为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$, ……………… (2 分)

所以小明这两道题得分之和为 20 分的概率为 $\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{256}$. ……………… (5 分)

(Ⅱ)设有 2 个正确选项的题为甲,有 3 个正确选项的题为乙.

小明每道题随机选择两个选项有 $C_4^2=6$ 种选择方法.对于甲题,只有 1 种选法得 10 分,其余 5 种选法均得 0 分,即甲题得 10 分的概率为 $\dfrac{1}{6}$,得 0 分的概率为 $\dfrac{5}{6}$.对于乙题,有 3 种选法得 5 分,其余 3 种选法得 0 分,即乙题得 5 分和得 0 分的概率均为 $\dfrac{1}{2}$. ……………… (7 分)

所以 $P(X=15)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$,$P(X=10)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$,

$P(X=5)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{12}$,$P(X=0)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{12}$. ……………… (9 分)

所以 X 的分布列为

X	15	10	5	0
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$

……………… (10 分)

所以 $EX=15\times\dfrac{1}{12}+10\times\dfrac{1}{12}+5\times\dfrac{5}{12}+0\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{25}{6}$. ……………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆、直线的性质,椭圆与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$,

由条件可知$\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\\ 2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2},\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ ……………………（3 分）

解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=\sqrt{2},\end{cases}$所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$，则 $x_0^2+y_0^2=3$. ① ……………………（6 分）

设过点 P 与椭圆 C 相切的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，

联立$\begin{cases}2x^2+3y^2=6,\\ y-y_0=k(x-x_0)\end{cases}$得 $(3k^2+2)x^2+6k(y_0-kx_0)x+3[(y_0-kx_0)^2-2]=0$， ……………………（7 分）

则 $\Delta=[6k(y_0-kx_0)]^2-4\times(3k^2+2)\times 3[(y_0-kx_0)^2-2]=0$，

整理得 $(x_0^2-3)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-2=0$. ② ……………………（8 分）

由题意知 k_1,k_2 为方程②的两根，

由根与系数的关系及①可得 $k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-3}=\dfrac{2x_0y_0}{-y_0^2}=-\dfrac{2x_0}{y_0}$. ……………………（9 分）

又因为 $k_3=k_{OP}=\dfrac{y_0}{x_0}$， ……………………（10 分）

所以 $(k_1+k_2)k_3=-\dfrac{2x_0}{y_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=-2$，

所以 $(k_1+k_2)k_3$ 为定值 -2. ……………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数的计算与几何意义，利用导数工具研究函数性质.

解析 （Ⅰ）若 $a=2$，则 $f(x)=2x(\ln x-1)-\dfrac{x^2}{2}$，

$f'(x)=2\left(\ln x-1+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)+x=2\ln x+x$， ……………………（1 分）

则切线的斜率为 $f'(1)=1$， ……………………（2 分）

又 $f(1)=(-2)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=x-1$，即 $x-y-\dfrac{5}{2}=0$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）$f'(x)=a\left(\ln x-1+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)+x=a\ln x+x$，

由条件知 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个根，

所以$\begin{cases}a\ln x_1+x_1=0,\\ a\ln x_2+x_2=0,\end{cases}$则 $a=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_1-\ln x_2}$. ……………………（5 分）

所以 $\dfrac{a(2+\lambda)}{2x_1+\lambda x_2}+1=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_1-\ln x_2}\cdot\dfrac{2+\lambda}{2x_1+\lambda x_2}+1=\dfrac{1-\dfrac{x_1}{x_2}}{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}\cdot\dfrac{2+\lambda}{2\dfrac{x_1}{x_2}+\lambda}+1$. ……………………（6 分）

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，分析可知 t 的取值范围是 $(0,1)$，则 $\ln t<0$，

不等式$\frac{(2+\lambda)(1-t)}{(2t+\lambda)\ln t}+1>0$恒成立，等价于$\frac{(2+\lambda)(1-t)}{2t+\lambda}+\ln t<0$恒成立. ………………………… (7 分)

设$h(t)=\frac{(2+\lambda)(1-t)}{2t+\lambda}+\ln t$，则$h(t)<0$恒成立，

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(2+\lambda)^2}{(2t+\lambda)^2}=\frac{(2t+\lambda)^2-t(2+\lambda)^2}{t(2t+\lambda)^2}=\frac{4(t-1)\left(t-\frac{\lambda^2}{4}\right)}{t(2t+\lambda)^2}$. ………………………… (8 分)

(ⅰ)若$\lambda^2\geqslant4$，则$t-\frac{\lambda^2}{4}<0$，所以$h'(t)>0$，$h(t)$在$(0,1)$上单调递增，

所以$h(t)<h(1)=0$恒成立，所以$\lambda\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$符合题意； ………………………… (10 分)

(ⅱ)若$\lambda^2<4$，则$h(t)$在$\left(0,\frac{\lambda^2}{4}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\lambda^2}{4},1\right)$上单调递减，

所以当t的取值范围是$\left(\frac{\lambda^2}{4},1\right)$时，$h(t)>h(1)=0$，不满足$h(t)<0$恒成立. ………………………… (11 分)

综上，实数λ的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. ………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查不同方程之间的互化，直线参数方程的应用.

解析 (Ⅰ)由$\begin{cases}x=t+1,\\ y=3-t\end{cases}$得$x-1=t=3-y$，得$x+y-4=0$，

故C_1的普通方程为$x+y-4=0$. ………………………… (2 分)

由$\rho\sin^2\theta=16\cos\theta$，得$\rho^2\sin^2\theta=16\rho\cos\theta$，

因为$\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$所以$y^2=16x$，考后对答案，公众号《恩公文化》

故C_2的直角坐标方程为$y^2=16x$. ………………………… (4 分)

(Ⅱ)因为C_1经过点$P(8,-4)$，且斜率为-1，

所以C_1的参数方程可写为$\begin{cases}x=8-\frac{\sqrt{2}}{2}m,\\ y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}m\end{cases}$ (m为参数)， ………………………… (6 分)

代入C_2的方程得$\frac{1}{2}m^2+4\sqrt{2}m-112=0$. ………………………… (7 分)

设M,N对应的参数分别为m_1,m_2，则$m_1+m_2=-8\sqrt{2}$，$m_1m_2=-224$， ………………………… (8 分)

所以$|PM|+|PN|=|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\sqrt{(-8\sqrt{2})^2-4\times(-224)}=32$. ……… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法，绝对值函数的性质.

解析 (Ⅰ)$f(x)=\begin{cases}6-4x,x<0,\\ 6-2x,0\leqslant x\leqslant2,\\ 4x-6,x>2,\end{cases}$ ………………………… (1 分)

不等式$f(x)>2x$等价于$\begin{cases}6-4x>2x,\\ x<0\end{cases}$或$\begin{cases}6-2x>2x,\\ 0\leqslant x\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}4x-6>2x,\\ x>2,\end{cases}$

得$x<0$或$0\leqslant x<\frac{3}{2}$或$x>3$，

综上可得不等式$f(x)>2x$的解集为$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup(3,+\infty)$. ……………………………… (5分)

(Ⅱ)作出$f(x)$的大致图象如图所示,由已知可得当$a=6$时,直线$y=a$与$f(x)$的图象围成的$\triangle ABC$的面积最大. ……………………………… (7分)

计算可得$B(0,6)$,$A(3,6)$,$C(2,2)$, ……………………………… (8分)

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times3\times(6-2)=6$. ……………………………… (10分)