24 届高三年级 TOP 二十名校调研考试四 · 数学

参考答案、提示及评分细则

1. D　$M=\{x|x^2+3x>4\}=\{x|x<-4$,或$x>1\}$,$N=\left\{x\left|\frac{4-x}{x+2}>0\right.\right\}=\{x|-2<x<4\}$,所以$\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$,则$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=\{x|-2<x\leqslant 1\}$.故选 D.

2. A　由"$\forall x\in\mathbf{R}$,关于x的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立",等价于$\Delta=(-a)^2-4a<0$,解得$0<a<4$,则"$0<a<4$"的一个必要不充分条件是$a>-1$.故选 A.

3. B　$f(x)=2^x-\frac{4}{x}$在$(0,+\infty)$上连续且单调递增,$f(1)=-2$,$f(2)=2$,故函数$f(x)$的零点位于区间$(1,2)$内.故选 B.

4. C　由$y=2ax+\ln x$,得$y'=2a+\frac{1}{x}$,所以切线的斜率为$k=2a+1$.又曲线$y=2ax+\ln x$在点$(1,2a)$处的切线与直线$y=\frac{1}{2}x+2$垂直,所以$2a+1=-2$,得$a=-\frac{3}{2}$.故选 C.

5. D　由题意知$C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}=0.96C_0$,所以$\frac{t}{5\,730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{96}{100}$,所以$t=5\,730\times\frac{2-(\lg 3+5\lg 2)}{\lg 2}$,所以$t\approx 5\,730\times\frac{2-1.982}{0.301}\approx 343$,所以$2\,023-343=1\,680$,故对应死亡的朝代为清代.故选 D.

6. A　$a=\log_2 0.25=\log_2 2^{-2}=-2$,$b=\tan\frac{7\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$c=\cos(-2\,024^\circ)=\cos 136^\circ=-\sin 46^\circ$,故$-1<c<0$,所以$b>0>c>-1>a$,即$b>c>a$.故选 A.

7. A　由任意两个实数$x_1\neq x_2$,不等式$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$恒成立,得函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.由函数$f(x+2)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,得$f(2)=0$,所以不等式$f(x+2\,024)>0=f(2)$化为$x+2\,024>2$,解得$x>-2\,022$,所以不等式的解集为$(-2\,022,+\infty)$.故选 A.

8. D　由第一次的"晷影长"是"表高"的 2 倍,得$\tan\alpha=2$,由第二次的"晷影长"是"表高"的 4 倍,得$\tan\beta=4$,所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+4}{1-2\times 4}=-\frac{6}{7}$,所以$\tan(2\alpha+2\beta)=\tan 2(\alpha+\beta)=\frac{2\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\times\left(-\frac{6}{7}\right)}{1-\left(-\frac{6}{7}\right)^2}=-\frac{84}{13}$.故选 D.

9. AC　对于选项 A,因为$\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$,故 A 正确;对于选项 B,因为$(e^{2x})'=(e^{2x})'(2x)'=2e^{2x}$,故 B 错误;对于选项 C,因为$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$,故 C 正确;对于选项 D,因为$\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{x(-\sin x)-\cos x}{x^2}=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$,故 D 错误.故选 AC.

10. ABD　对于 A,$\exists x>0$,$e^x<1$的否定为$\forall x>0$,$e^x\geqslant 1$,故 A 正确;对于 B,因为$\triangle ABC$为锐角三角形,所以$A+B>\frac{\pi}{2}$,所以$A>\frac{\pi}{2}-B$,易知A,$\frac{\pi}{2}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,故 B 正确;对于 C,因为$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$,所以$\tan\theta=\frac{1}{2}$或$\tan\theta=-2$,故 C 错误;对于 D,$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$,当且仅当$x=\frac{1}{x}$,即$x=1$时等号成立,故$x+\frac{1}{x}$的最小值为 2,故 D 正确.故选 ABD.

11. ACD　由题意得$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后得到函数$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}+\varphi\right)$,若函数$y=g(x)$为偶函数,则$\frac{\pi}{8}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k$

$\in \mathbf{Z}$)，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in \mathbf{Z})$，因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{8}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right)$.

对于 A，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，故 A 正确；对于 B，C，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)=1\neq 0$，故 B 错误，C 正确；对于 D，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{8}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得 $4k\pi-\frac{7\pi}{4}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，对应单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，因为 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]\subseteq\left[-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 ACD.

12. ABC　对于选项 A，当 $m=1$ 时，函数 $f(x)=e^{x-1}$，显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确；对于选项 B，C，当 $m=2$ 时，$f(x)=e^{x-2}-\cos x$，$f'(x)=e^{x-2}+\sin x$，当 $x>2$ 时，$e^{x-2}>1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，又 $f'(2)=1+\sin 2>0$，故 $f'(x)>0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 B，C 均正确；对于选 D，当 $m=2$ 时，$f(x)=e^{x-2}-\cos x$，$f'(x)=e^{x-2}+\sin x$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\sin x>0$，$e^{x-2}>0$，所以 $f'(x)=e^{x-2}+\sin x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，因为 $f(0)=e^{-2}-\cos 0=\frac{1}{e^2}-1<0$，又 $f(\pi)=e^{\pi-2}+1>0$，故由零点存在定理可知，存在唯一 $x_1\in(0,\pi)$，使得 $f(x_1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点，故 D 错误. 故选 ABC.

13. $\frac{17}{4}$　因为 $2^a=32=2^5$，所以 $a=5$，所以 $\log_5 2\cdot\log_4 x=\frac{1}{2}\log_5 x=\frac{2}{5}\times 5$，即 $\log_5 x=4$，所以 $x=5^4$，所以 $\log_5 x+\log_x 5=\log_5 5^4+\log_{5^4}5=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$.

14. 14　由题意知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{3a+1}{a}+\frac{2b+4}{b}=3+\frac{1}{a}+2+\frac{4}{b}=5+\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geqslant 5+\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)\times(a+b)=10+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{4a}{b}}=14$，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 时等号成立，所以 $\frac{3a+1}{a}+\frac{2b+4}{b}$ 的最小值是 14.

15. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$（2 分）　$\sqrt{3}$（3 分）　因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得 $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象，即 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$，因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $-\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. 所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时取得.

16. 89　因为 $f(x+1)-f(2-x)=2x-1$，所以 $f'(x+1)+f'(2-x)=2$，所以 $f'(x)=-f'(3-x)+2$，所以 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=-f'\left(\frac{3}{2}\right)+2$，即 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=1$，$f'(x)+f'(3-x)=2$，所以 $f'\left(\frac{i}{30}\right)+f'\left(\frac{90-i}{30}\right)=2$，则 $\sum_{i=1}^{89}f'\left(\frac{i}{30}\right)=\left[f'\left(\frac{1}{30}\right)+f'\left(\frac{89}{30}\right)\right]+\left[f'\left(\frac{2}{30}\right)+f'\left(\frac{88}{30}\right)\right]+\cdots+\left[f'\left(\frac{44}{30}\right)+f'\left(\frac{46}{30}\right)\right]+f'\left(\frac{45}{30}\right)=2\times\frac{89-1}{2}+1=89$.

17. 解：(1) 因为不等式 $x^2-2mx+m+2>0$ 对于一切实数 x 恒成立，……2 分

所以 $\Delta=4m^2-4(m+2)<0$，解得 $-1<m<2$，

即 $A=(-1,2)$.……5 分

(2) 因为 $x^2-2mx+m^2-1\leqslant 0$，所以 $[x-(m-1)][x-(m+1)]\leqslant 0$，

解得 $m-1\leqslant x\leqslant m+1$，即 $B=[m-1,m+1]$.……6 分

因为 p 是 q 的必要不充分条件，故 $B\subsetneqq A$.……7 分

即$[m-1,m+1]\subsetneqq(-1,2)$，所以$\begin{cases}m+1<2,\\m-1>-1,\end{cases}$解得$0<m<1$，…………………… 9分

所以实数m的取值范围是$(0,1)$。…………………… 10分

18. 解：(1)$f(x)=\frac{1}{2}+\sin x\cos x-\cos^2 x=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，…………………… 2分

所以$f\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{3}$，…………………… 4分

解得$\cos A=\frac{2}{3}$，又$A\in(0,\pi)$，

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，…………………… 6分

(2)由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2bc-\frac{4}{3}bc=\frac{2}{3}bc$，…………………… 8分

因为$a=8$，所以$bc\leq\frac{3}{2}\times a^2=96$，当且仅当$b=c=4\sqrt{6}$时等号成立。…………………… 10分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leq\frac{1}{2}\times 96\times\frac{\sqrt{5}}{3}=16\sqrt{5}$，即$\triangle ABC$面积的最大值为$16\sqrt{5}$。…………………… 12分

19. 解：(1)由题意知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}(x>0)$，…………………… 2分

令$f'(x)>0$，得$x>1$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$，

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，…………………… 4分

所以$x=1$是$f(x)$的唯一极值点，且为极小值点，

所以$f(x)_{极小值}=f(1)=2$，没有极大值。…………………… 6分

(2)由题意知$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，由$g(x)-g(a)>-\frac{1}{a}$，得$g(a)-\frac{1}{a}<g(x)$，所以$\ln a<g(x)_{\min}$，

…………………… 7分

由(1)知$f(x)$的极小值为2，即最小值为2，所以$g(x)$的最小值为1，…………………… 9分

所以$\ln a<g(x)_{\min}=1$，

所以$0<a<e$，

故实数a的取值范围为$(0,e)$。…………………… 12分

20. 解：(1)设$f(x)=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$，由$f(x)$的图象经过点$(2,4)$，所以$a^2=4$，所以$a=2$，…………………… 1分

函数$f(x)$的解析式为$f(x)=2^x$，则$g(x)=\frac{f(x)-b}{f(x)+1}=\frac{2^x-b}{2^x+1}$，…………………… 2分

因为$g(x)$为奇函数，所以$g(-x)=-g(x)$，即$\frac{2^{-x}-b}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x-b}{2^x+1}$，…………………… 3分

得到$(1-b)(2^x+1)=0$，解得$b=1$，所以$g(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$。…………………… 4分

(2)因为$g(x)[h(x)+2]=2^x-2^{-x}$，又$x\in\mathbf{R}$且$x\neq 0$，所以$g(x)\neq 0$，

所以$h(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{g(x)}-2=\frac{2^{2x}-1}{2^x\times\frac{2^x-1}{2^x+1}}-2=2^x+2^{-x}(x\neq 0)$，…………………… 5分

则$h(2x)=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2$。…………………… 6分

不等式$h(2x)\geq m\cdot h(x)-18$恒成立，即$(2^x+2^{-x})^2-2\geq m(2^x+2^{-x})-18$恒成立，…………………… 7分

令$t=2^x+2^{-x}$，则$t=2^x+2^{-x}>2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，…………………… 8分

则$t^2-2\geq mt-18$，可得$m\leq t+\frac{16}{t}$在$(2,+\infty)$上恒成立，…………………… 9分

因为$t>2$，由基本不等式可得$t+\frac{16}{t}\geq 8$，当且仅当$t=4$时，等号成立，…………………… 11分

所以$m\leq 8$，即实数m的最大值为8。…………………… 12分

21. 解：(1)因为$\frac{OA}{\sin\theta}=\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{AB}{\sin\angle AOB}$，

$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$AB=4\sqrt{3}$，$\angle OAB=\frac{2\pi}{3}-\theta$，

所以 $OA=8\sin\theta$，$OB=8\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=8\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$， ………………………………… 2 分

所以 $OA+OB=8\sin\theta+8\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=12\sin\theta+4\sqrt{3}\cos\theta=8\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$， ………………… 4 分

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$，当 $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$时，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，

$(OA+OB)_{\min}=8\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=12$，所以 $OA+OB$ 的最小值为 12. ………………………………… 6 分

(2)因为 $AB=4\sqrt{3}$，$\angle MAB=\angle MBA=\frac{\pi}{3}$，所以 $AM=BM=AB=4\sqrt{3}$， ………………………………… 7 分

在$\triangle OMB$中，由余弦定理得 $OM^2=OB^2+BM^2-2OB\cdot BM\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$

$=64\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+48-64\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$ ………………………………… 8 分

$=32\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\theta\right)\right]+48-32\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\theta\right)=64\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)+80=64\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+80$.

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$， ………………………………… 10 分

当 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，OM^2 取最小值 112，即 OM 取最小值 $4\sqrt{7}$，

故当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，M 与设施 O 之间的距离最近. ………………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意知 $f(x)$的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+m>0$， ………………………………… 1 分

若 $m\geqslant 0$，$f'(x)=\frac{1}{x}+m>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ………… 2 分

若 $m<0$，令 $f'(x)=\frac{1}{x}+m>0$，得 $0<x<-\frac{1}{m}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{1}{m}$， ………………………………… 3 分

所以函数 $f(x)$ 在$\left(0,-\frac{1}{m}\right)$上单调递增；在$\left(-\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递减. ………………………………… 4 分

(2)当 $m=0$ 时，对任意 $x>0$，$\frac{ax(e^{ax}+1)}{x^2+1}\geqslant 2f(x)$恒成立，

即为对任意 $x>0$，恒有 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$， ………………………………… 5 分

令 $F(x)=(x+1)\ln x$，则不等式等价于 $F(e^{ax})\geqslant F(x^2)$，

且 $F'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}=\ln x+\frac{1}{x}+1$， ………………………………… 6 分

令 $m(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，$m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $m'(x)<0$，得 $0<x<1$，令 $m'(x)>0$，得 $x>1$，

所以 $m(x)$在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………… 7 分

所以 $F'(x)=m(x)\geqslant m(1)=2>0$，故 $F(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $F(e^{ax})\geqslant F(x^2)$，得 $e^{ax}\geqslant x^2$ 对任意 $x>0$ 恒成立， ………………………………… 8 分

两边取对数，得 $ax\geqslant 2\ln x$，所以$\frac{a}{2}\geqslant\frac{\ln x}{x}$对任意 $x>0$ 恒成立. ………………………………… 9 分

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)<0$，得 $x>e$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<e$，

所以 $g(x)$在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$， ………………… 11 分

所以$\frac{a}{2}\geqslant g(x)_{\max}$，即$\frac{a}{2}\geqslant\frac{1}{e}$，解得 $a\geqslant\frac{2}{e}$，

故 a 的取值范围为$\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$. ………………………………… 12 分

关于我们