

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 数学模拟试题

注意事项:

1. 考试时间 120 分钟, 总共 150 分.
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题纸上.
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题纸上, 写在本试卷上无效.
4. 考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

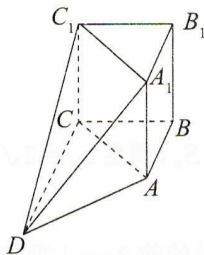
1. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{N}_+ \mid \frac{x+2}{x-3} \leq 0 \right\}$, $B = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
 A. \emptyset B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 已知复数 z 满足 $z^2 + 2z + 2 = 0$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于
 A. 第一、二象限 B. 第三、四象限
 C. 第一、四象限 D. 第二、三象限
3. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $a_1 = 1$, 则 $S_5 =$
 A. 40 B. 81 C. 121 D. 156
4. 已知 $\theta \in (0, \pi)$, 满足 $\cos 2\theta + \cos \theta = 0$, 则 $\theta =$
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
5. $(x^2 - x + y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^2$ 的系数为
 A. -10 B. 10 C. -30 D. 30
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, 点 P 为 AE 与 BF 的交点, $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda - \mu =$
 A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, O 为原点, A, B 分别为该双曲线的左、右顶点, F_1, F_2 分别为该双曲线的左、右焦点, 第二象限内的点 P 在双曲线的渐近线上, OP 为 $\angle APF_2$ 的平分线, 且线段 $|OP|$ 的长为焦距的一半, 则该双曲线的离心率为
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$
8. 已知直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = e^x + 2$ 和曲线 $y = \ln(e^2 x)$ 均相切, 则实数 k 的解的个数为
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 无数

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 某学校为了调查学生对“只要学习够努力,成绩一定有奇迹”这句话的认可程度,随机调查了90名本校高一高二的学生,其中40名学生来自高一年级,50名学生来自高二年级.经调查,高一年级被调查的这40名学生中有20人认可,有20人不认可;高二年级被调查的这50名学生中有40人认可,有10人不认可,用样本估计总体,则下列说法正确的是

(参考数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$, $P(\chi^2 \geq 6.635) = 0.010$, $P(\chi^2 \geq 10.828) = 0.001$)

- A. 高一高二大约有66.7%的学生认可这句话
B. 高一高二大约有99%的学生认可这句话
C. 依据 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,认为学生对这句话认可与否与年级有关
D. 在犯错误的概率不超过0.01的前提下,认为学生对这句话认可与否与年级无关
10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ,过点 F 的直线 l 与该抛物线交于 M, N 两点,且 $|MN|$ 的最小值为4, O 为坐标原点,则
- A. $p = 2$
B. 存在直线 l ,使得 $\triangle OMN$ 的面积为1
C. 对于任意的直线 l ,都有 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -3$
D. 当 $|MN| = 8$ 时,直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$
11. 如图所示,该几何体由一个直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和一个四棱锥 $D-ACC_1A_1$ 组成, $AB = BC = AC = AA_1 = 2$,则下列说法正确的是



- A. 若 $AD \perp AC$,则 $AD \perp A_1C$
B. 若平面 A_1C_1D 与平面 ACD 的交线为 l ,则 $AC \parallel l$
C. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $\frac{14\pi}{3}$
D. 当该几何体有外接球时,点 D 到平面 ACC_1A_1 的最大距离为 $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$

12. 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x-1) = -f(x+1)$, $f(x)$ 的部分解析式为

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(2x - \frac{7}{4}\right), & x > 1, \end{cases} \quad \text{则下列说法正确的是}$$

- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ 上单调递减
B. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, n)$ 内满足 $f(x) < 1$ 恒成立,则 $n \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$
C. 存在实数 k ,使得 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = kx$ 有7个交点
D. 已知方程 $f(x) = m (m > 0)$ 的解为 x_1, x_2, x_3, x_4 ,则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > -\frac{1}{4}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$ ($\varphi > 0$) 为奇函数,则 φ 的最小值为_____.
14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,又 $\triangle PAD$ 为等边三角形, E 为 PD 的中点, Q 为平面 $ABCD$ 内的动点,则直线 AE 与直线 BQ 所成角的正切值最小为_____.
15. 在某一天的幼儿园活动中,5 名小朋友每人制作了一个小礼物,每人随机拿一个礼物,则这 5 名小朋友都没有拿到自己制作的礼物的概率为_____.
16. 阿波罗尼斯是古希腊著名的数学家,他对圆锥曲线有深刻而系统的研究,主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线论》一书,阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一,指的是“如果动点 M 与两定点 A, B 的距离之比为 λ ($\lambda > 0, \lambda \neq 1$),那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆”.下面我们来研究与此相关的一个问题,已知点 P 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, $M(-4, 0)$, $N(3, 1)$,则 $|PM| + 2|PN|$ 的最小值为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

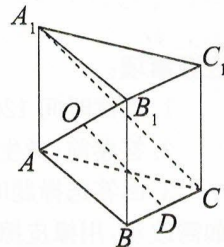
17. (本小题满分 10 分)
已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $a \cos C + (2b + c) \cos A = 0$,角 A 的平分线与边 BC 交于点 D .
(1) 求角 A ;
(2) 若 $AD = 2$,求 $b + 4c$ 的最小值.
18. (本小题满分 12 分)
已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,满足 $a_n = 2\sqrt{S_n} - 1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $b_n = a_n \cos \frac{2n\pi}{3}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 $3n + 1$ 项和 T_{3n+1} .
19. (本小题满分 12 分)
“绿水青山就是金山银山”的口号已经深入人心,人们对环境的保护意识日益增强,质检检测部门也会不时地对一些企业的生产污染情况进行排查,并作出相应的处理.本次排查了 30 个企业,共查出 510 个污染点,其中造成污染点前 10 名的企业分别造成的污染点数为 58, 36, 36, 35, 33, 32, 28, 26, 24, 22.
(1) 求这 30 个企业造成污染点的第 80 百分位数;
(2) 已知造成污染点前 10 名的企业的方差为 92.4,其他 20 个企业造成污染点的方差为 44.7,求这 30 个企业造成污染点的总体方差.

20. (本小题满分 12 分)

如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AB$, $AB_1 \perp A_1C$, AB_1 的中点为 O , BC 的中点为 D .

(1)证明: $OD \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2)若 $\angle ACB=90^\circ$, $AB_1=B_1C$, $AC=2BC=4$, 求平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成角的大小.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(2\sqrt{2}, 0)$, 点 B 与 A 关于原点对称, 椭圆 C 上的点 H 满足直线 HA 与直线 HB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)直线 $l: y = \frac{1}{2}x + t$ 与椭圆 C 相交于 M, N 两点, 已知点 $P(-2, 1)$, 点 Q 与 M 关于原点对称, 讨论: 直线 PQ 的斜率与直线 PN 的斜率之和是否为定值? 如果是, 求出此定值; 如果不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^2}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值点个数;

(2)若不等式 $(x+1)^2 f(x+1) > m - \frac{3m}{x} - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求 m 可取的最大整数值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

