九江市2023年第一次高考模拟统一考试

数 学 试 题（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分. 全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的学号、姓名等项内容填写在答题卡上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回.

第Ⅰ卷（选择题60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$M=\{x\in\mathbf{N}|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，则$M\cap N=$（A）

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$

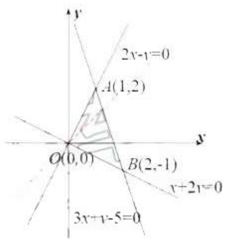
解：$\because M=\{x\in\mathbf{N}|-1\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，$\therefore M\cap N=\{0,1,2,3\}$，故选A.

2. 复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2+4\mathrm{i}$，则$z$的虚部为（A）

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

解：$z=\dfrac{2+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-2+6\mathrm{i}}{2}=-1+3\mathrm{i}$，虚部为3，故选A.

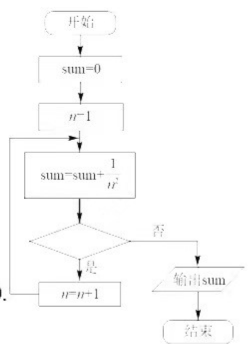
3. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y\geqslant 0\\x+2y\geqslant 0\\3x+y-5\leqslant 0\end{cases}$，则$z=x-y$的最大值为(D)



A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3

解：由约束条件作出可行域，如图中阴影部分所示. 易知目标函数$z=x-y$的最大值在$B(2,-1)$处取得，$z_{\max}=3$. 故选D.

4. 巴塞尔问题是一个著名的级数问题，这个问题首先由皮耶特罗·门戈利在1644年提出，由莱昂哈德·欧拉在1735年解决. 欧拉通过推导得出：$1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$. 某同学为了验证欧拉的结论，设计了如右算法计算$1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{1000^2}$的值来估算，则判断框填入的是(D)



A. $n>1000$　　B. $n\geqslant 1000$

C. $n\leqslant 1000$　　D. $n<1000$

解：由程序框图可知，最后一次进入判断框时，$n=999$，执行最后一次循环体，$n=1000$，$\text{sum=sum+}\dfrac{1}{1000^2}=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{1000^2}$，输出sum，故选D.

5. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，则“$q>0$”是“$\{S_n\}$为递增数列”的（B）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解：若$a_1<0$，$q>0$，则$\{S_n\}$为递减数列. 若$\{S_n\}$为递增数列，则$a_1=S_2-S_1>0$，$a_2=S_3-S_2>0$，

$\therefore q=\dfrac{a_2}{a_1}>0$. 所以“$q>0$”是“$\{S_n\}$为递增数列”的必要不充分条件. 故选 B.

6. 已知$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上. 若球O的表面积为8π，则O到平面ABC的距离为（B）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

解：$\because 4\pi R^2=8\pi$，$\therefore$球O的半径$R=\sqrt{2}$，设$\triangle ABC$的外心为O'，从而$O'A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所求距离$d=\sqrt{2-\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故选 B.

7. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，若$f(2x+1)$为偶函数，且$f(x)+f(4-x)=2$，$f(1)=2$，则$\sum\limits_{n=1}^{22}f(n)=$（A）

A. 23　　B. 22　　C. 19　　D. 18

解：由$f(x)+f(4-x)=2$，令$x=2$得$f(2)=1$. 令$x=1$，得$f(1)+f(3)=2$，$\because f(1)=2$，$\therefore f(3)=0$.

因为$f(2x+1)$为偶函数，$\therefore f(2x+1)=f(-2x+1)$，即$f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore$曲线$f(x)$关于直线$x=1$对称.

又$\because f(x)+f(4-x)=2$，$\therefore f(x)$图像关于点$(2,1)$中心对称，$\therefore f(x)$的周期$T=4\times(2-1)=4$.

$\therefore f(4)=f(0)=f(2)=1$，$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{22}f(n)=5\times4+f(1)+f(2)=23$. 故选 A.

8. 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），过点$M(2,0)$作$E$的一条渐近线$l$的垂线，垂足为$P$，过点$M$作$x$轴的垂线交$l$于点$Q$，若$\triangle MPQ$与$\triangle MPO$的面积相等（$O$为坐标原点），则$E$的离心率为（C）

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

解：$\because\triangle MPQ$与$\triangle MPO$的面积相等，$\therefore P$为OQ的中点，故$\triangle OMQ$为等腰直角三角形，

$\therefore \angle MOQ=45^\circ$，$\therefore\dfrac{b}{a}=1$，$\therefore a^2=b^2$，即$a^2=c^2-a^2$，$\therefore e^2=2$，$e=\sqrt{2}$，故选 C.

9. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M为棱AB上的动点，则A_1M与平面ABC_1D_1所成角的取值范围为（C）

A. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$　　B. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　C. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$　　D. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$

解：设 $AD_1\cap A_1D=O$，连接 OM，$\because A_1O\perp$ 平面 ABC_1D_1，$\therefore\angle A_1MO$ 即为 A_1M 与平面 ABC_1D_1 所成角 θ．设 $AA_1=2$，$\tan\theta=\frac{A_1O}{OM}=\frac{\sqrt{2}}{OM}$，$\because\sqrt{2}\le OM\le\sqrt{6}$，$\therefore\tan\theta\in[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$，$\therefore\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$，故选 C.

10. 已知 $\vec{m},\vec{n}$ 为单位向量，则向量 $\vec{m}+2\vec{n}$ 与 $\vec{n}$ 夹角的最大值为(A)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

解：设 $<\vec{m},\vec{n}>=\alpha$，则 $\cos<\vec{m}+2\vec{n},\vec{n}>=\frac{(\vec{m}+2\vec{n})\cdot\vec{n}}{|\vec{m}+2\vec{n}||\vec{n}|}=\frac{\cos\alpha+2}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}$，

令 $t=\sqrt{5+4\cos\alpha}$，$t\in[1,3]$，　$\therefore\cos<\vec{m}+2\vec{n},\vec{n}>=\frac{\frac{t^2-5}{4}+2}{t}=\frac{1}{4}(t+\frac{3}{t})\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时取等号，向量 $\vec{m}+2\vec{n}$ 与 $\vec{n}$ 夹角的最大值为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

11. 为了学习、宣传和践行党的二十大精神，某班组织全班学生开展了以“学党史、知国情、圆梦想”为主题的党史暨时政知识竞赛活动. 已知该班男生 20 人，女生 30 人，根据统计分析，男生组成绩和女生组成绩的方差分别为 $s_1^{\,2},s_2^{\,2}$. 记该班成绩的方差为 s^2，则下列判断正确的是（D）

A. $s^2=\frac{s_1^{\,2}+s_2^{\,2}}{2}$　　B. $s^2\geqslant\frac{s_1^{\,2}+s_2^{\,2}}{2}$　　C. $s^2=\frac{2s_1^{\,2}+3s_2^{\,2}}{5}$　　D. $s^2\geqslant\frac{2s_1^{\,2}+3s_2^{\,2}}{5}$

解:记男生组成绩和女生组成绩的平均分分别为 $\bar{x},\bar{y}$，则

$$s_1^{\,2}=\frac{1}{20}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{20}-\bar{x})^2]=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-\bar{x}^2,\quad s_2^{\,2}=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}y_i^2-\bar{y}^2,$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{20}x_i^2=20s_1^2+20\bar{x}^2,\ \sum_{i=1}^{30}y_i^2=30s_2^2+30\bar{y}^2,\quad \bar{x'}=\frac{1}{50}(20\bar{x}+30\bar{y})=\frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{5},$$

$$\therefore s^2=\frac{1}{50}(\sum_{i=1}^{20}x_i^2+\sum_{i=1}^{30}y_i^2)-\bar{x'}^2=\frac{2s_1^2+3s_2^2}{5}+\frac{2}{5}\bar{x}^2+\frac{3}{5}\bar{y}^2-(\frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{5})^2$$

$$=\frac{2s_1^2+3s_2^2}{5}+\frac{6}{25}(\bar{x}-\bar{y})^2\geqslant\frac{2s_1^2+3s_2^2}{5}$$，故选 D.

12. 若对 $\forall x\in(\frac{1}{2\sqrt{e}},\frac{1}{2})$，不等式 $(ax-4)\ln x<2\ln a-ax\ln 2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(C)

A. $(0,4e]$　　B. $(4\sqrt{e},+\infty)$　　C. $[4\sqrt{e},+\infty)$　　D. $(4e,+\infty)$

解：由已知得：$a>0$，$(ax-4)\ln x<2\ln a-ax\ln 2\Leftrightarrow ax\ln(2x)<2(\ln a+2\ln x)$，

$\Leftrightarrow \dfrac{ax\ln(2x)}{2} < \ln(ax^2) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(2x)}{2x} < \dfrac{\ln(ax^2)}{ax^2}$.

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f(2x) < f(ax^2)$，求导得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，且当 $0<x<1$ 时 $f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.

$\because x\in(\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{2})$，$\therefore 2x\in(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},1)$，$\therefore f(2x)<0$，由 $f(2x) < f(ax^2)$ 及 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图象可知，$2x<ax^2$ 恒成立，即 $a>\dfrac{2}{x}$ 成立，而 $\dfrac{2}{x}\in(4,4\sqrt{\mathrm{e}})$，$\therefore a\geqslant 4\sqrt{\mathrm{e}}$，故选 C.

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=8$，$S_7=35$，则 $a_5=$ $\underline{\quad 7 \quad}$.

解：依题意得 $\begin{cases}4a_1+6d=8\\7a_1+21d=35\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=-1\\d=2\end{cases}$，$\therefore a_5=a_1+4d=7$.

14. 2022 年 11 月 8 日，江西省第十六届运动会在九江市体育中心公园主体育场开幕，这是九江市举办的规模最大、规格最高的综合性体育赛事. 赛事期间，有 3000 多名志愿者参加了活动. 现将 4 名志愿者分配到跳高、跳远 2 个项目参加志愿服务活动，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则"恰好有一个项目分配了 3 名志愿者"的概率为 $\underline{\dfrac{4}{7}}$.

解：$p=\dfrac{C_4^1A_2^2}{2^4-2}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$.

15. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$）的最小正周期为 π，$f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{12},0)$ 对称，$f(0)>0$. 若 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上存在最大值 2，则实数 m 的最小值是 $\underline{\dfrac{5\pi}{6}}$.

解：$\because T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=2$，$\therefore \dfrac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，即 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in Z$，又 $f(0)=2\cos\varphi>0$，

$\therefore \varphi=2k_1\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in Z$，$\therefore f(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$x\in[0,m]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},2m+\dfrac{\pi}{3}]$，画图可知：

$2m+\dfrac{\pi}{3}\geq 2\pi$，解得 $m\geq\dfrac{5\pi}{6}$，即 $m_{\min}=\dfrac{5\pi}{6}$.

16. 已知点 A,B 分别是抛物线 $C:y^2=-4x$ 和圆 $E:x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 上的动点，点 A 到直线 $l:x=2$ 的距离为 d，则 $|AB|+d$ 的最小值为 $\underline{2\sqrt{2}}$.

解：圆 E 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$，$\therefore E(1,-2)$，抛物线 C 的焦点为 $F(-1,0)$，准线方程为 $x=1$，

$\therefore |AF|=d-1$，$\therefore |AB|+d=|AB|+|AF|+1\geq|AE|-1+|AF|+1=|AE|+|AF|\geq|EF|=2\sqrt{2}$，即 $|AB|+d$

的最小值为$2\sqrt{2}$.

三、解答题:本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分12分)

$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别是a,b,c，已知$b=2$，$2\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

(1)求角B的值;

(2)求AC边上高的最大值.

解:(1)由$2\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cos B}$ ·········1分

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cos B}$ ·········3分

又$b=2$，$\therefore \sin B=\sqrt{3}\cos B$ ·········4分

即$\tan B=\sqrt{3}$ ·········5分

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$ ·········6分

(2)解法一：设AC边上高为h，

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$4=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{\pi}{3}$ ·········7分

即$a^2+c^2-ac=4$ ·········8分

$\because a^2+c^2\geq 2ac$，$\therefore 2ac-ac\leq 4$，即$ac\leq 4$，当且仅当$a=c$时，等号成立·········10分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac\in(0,\sqrt{3}]$ ·········11分

又$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bh=h$，$\therefore h\in(0,\sqrt{3}]$，$AC$边上高的最大值为$\sqrt{3}$ ·········12分

解法二：设AC边上高为h，

由正弦定理得，$a=\dfrac{b}{\sin B}\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin A$，$c=\dfrac{b}{\sin B}\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$ ·········7分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2\sin A\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C$ ·········8分

因为$A+B+C=\pi$，$\therefore \sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin(B+C)\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\cos C+\dfrac{1}{2}\sin^2 C)$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2C+\dfrac{1-\cos 2C}{4})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ………10 分

$\because C\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$\therefore 2C-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，$\therefore \sin(2C-\dfrac{\pi}{6})\in(-\dfrac{1}{2},1]$，$\therefore S_{\triangle ABC}\in(0,\sqrt{3}]$ ………11 分

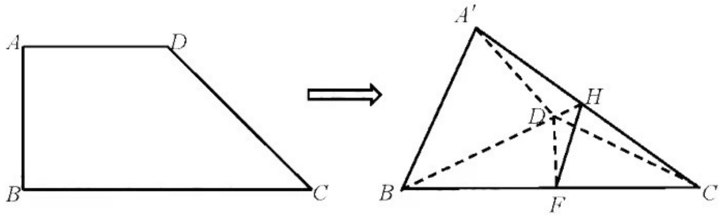
又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bh=h$，$\therefore h\in(0,\sqrt{3}]$，$AC$ 边上高的最大值为 $\sqrt{3}$ ………12 分

18.（本小题满分 12 分）

如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折至 $\triangle A'BD$ 的位置，使得 $A'B\perp A'C$，F 为 BC 的中点.

(1) 求证：平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD；

(2) H 为线段 $A'C$ 上一点，若二面角 $C-DF-H$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求线段 $A'H$ 的长.



解：(1) $\because A'B\perp A'C$，$A'B\perp A'D$，$A'C\cap A'D=A'$，$A'C,A'D\subsetneqq$ 平面 $A'CD$，

$\therefore A'B\perp$ 平面 $A'CD$ ………1 分

又 $CD\subsetneqq$ 平面 $A'CD$，$\therefore CD\perp A'B$ ………2 分

由直角梯形 $ABCD$，$AD\,//\,BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，得 $CD\perp BD$ ………3 分

又 $A'B\cap BD=B$，$A'B,BD\subsetneqq$ 平面 $A'BD$，$\therefore CD\perp$ 平面 $A'BD$ ………4 分

又 $CD\subsetneqq$ 平面 BCD，$\therefore$ 平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD ………5 分

(2) 取 BD 的中点 E，连接 $A'E$，EF，

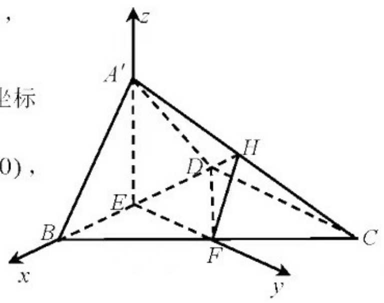
$\because A'B=A'D$，$\therefore A'E\perp BD$，又平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，$\therefore A'E\perp$ 平面 BCD，

$\because E$ 为 BD 的中点，F 为 BC 的中点，$\therefore EF\,//\,CD$，又 $CD\perp BD$，

$\therefore EF\perp BD$ ………6 分

故以 EB,EF,EA' 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立如图空间直角坐标系，则 $E(0,0,0)$，$A'(0,0,1)$，$D(-1,0,0)$，$F(0,1,0)$，$C(-1,2,0)$，

设 $\overrightarrow{A'H}=\lambda\overrightarrow{A'C}$，则 $H(-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$ ………7 分



设平面HDF的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

$\because \overrightarrow{DF}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DH}=(1-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$，

$\because \begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DH}=0\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}x+y=0\\ (1-\lambda)x+2\lambda y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$，令$x=1$，得$y=-1$，$z=\dfrac{3\lambda-1}{1-\lambda}$，即$\vec{m}=(1,-1,\dfrac{3\lambda-1}{1-\lambda})$

………9 分

平面CDF的一个法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$………10 分

$\therefore |\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|\dfrac{3\lambda-1}{1-\lambda}|}{\sqrt{2+(\dfrac{3\lambda-1}{1-\lambda})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$或$\lambda=0$（舍）………11 分

即H为$A'C$的中点，故线段$A'H$的长为$\dfrac{1}{2}|A'C|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$………12 分

19.（本小题满分 12 分）

飞行棋是一种竞技游戏，玩家用棋子在图纸上按线路行棋，通过掷骰子决定行棋步数. 为增加游戏乐趣，往往在线路格子中设置一些“前进”“后退”等奖惩环节，当骰子点数大于或等于到达终点的格数时，玩家顺利通关. 已知甲、乙两名玩家的棋子已经接近终点，其位置如图所示：

（1）求甲还需抛掷 2 次骰子才顺利通关的概率；

（2）若甲、乙两名玩家每人最多再投掷 3 次，且第 3 次无论是否通关，该玩家游戏结束. 设甲、乙两玩家再投掷骰子的次数为X,Y，分别求出X,Y的分布列和数学期望.

解：（1）甲第 1 次抛掷未到达终点，其点数应小于 4………1 分

若第 1 次掷出的点数为 1，根据游戏规则，棋子前进 1 步后可再前进 1 步，到达距离终点差 2 步的格子，第 2 次掷出的点数大于 1，即可顺利通关，其概率为$P_1=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$………2 分

若第 1 次掷出的点数为 2，棋子到达距离终点差 2 步的格子，第 2 次掷出的点数大于 1，即可顺利通关，其概率为$P_2=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$…………3 分

若第 1 次掷出的点数为 3，根据游戏规则，棋子到达距离终点差 1 步的格子后需后退 3 步，又回到了原位，第 2 次掷出的点数大于 3，可顺利通关，其概率为$P_3=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$………4 分

故甲抛掷 2 次骰子顺利通关的概率为$P=P_1+P_2+P_3=\dfrac{5}{36}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{13}{36}$………5 分

（2）依题意得$P(X=1)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{13}{36}$，$P(X=3)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{13}{36}=\dfrac{5}{36}$……7 分

$P(Y=1)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$P(Y=2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{9}$，$P(Y=3)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{9}$………10 分

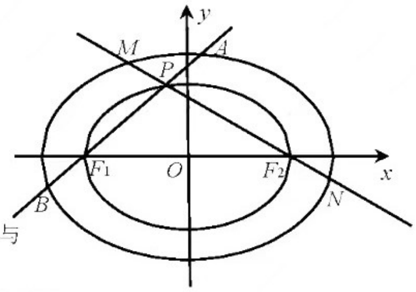
X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{5}{36}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{5}{36}=\frac{59}{36}$，$E(Y)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{17}{9}$ ………12 分

20.（本小题满分 12 分）

如图，已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 为 C_1 上的一个动点（非左右顶点），连接 AF_1 并延长交 C_1 于点 B，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，$\triangle AF_1F_2$ 面积的最大值为 2.



(1) 求椭圆 C_1 的标准方程；

(2) 若椭圆 C_2 的长轴端点为 F_1,F_2，且 C_2 与 C_1 的离心率相等，P 为 AB 与 C_2 异于 F_1 的交点，直线 PF_2 交 C_1 于 M,N 两点，证明：$|AB|+|MN|$ 为定值.

解：(1) $\because\triangle ABF_2$ 的周长为 8，由椭圆的定义得 $4a=8$，即 $a=2$ ………1 分

又 $\triangle AF_1F_2$ 面积的最大值为 2，$\therefore\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=2$，即 $bc=2$ ………2 分

$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore b^2+c^2=4$，$\therefore b^2+(\frac{2}{b})^2=4$，解得 $b=\sqrt{2}$ ………3 分

$\therefore$ 椭圆 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ………4 分

(2) 由 (1) 可知 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，$\therefore C_2:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ………5 分

设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\because$ 点 P 在曲线 C_2 上，$\therefore x_0^2+2y_0^2=2$ ………6 分

依题意，可设直线 AB，MN 的斜率分别为 k_1,k_2，

则 AB,MN 的方程分别为 $y=k_1(x+\sqrt{2})$，$y=k_1(x-\sqrt{2})$，

于是 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}\cdot\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}=\frac{y_0^2}{x_0^2-2}=\frac{\frac{1}{2}(2-x_0^2)}{x_0^2-2}=-\frac{1}{2}$ ………7 分

联立方程组 $\begin{cases}y=k_1(x+\sqrt{2})\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 y 整理，得 $(2k_1^{\ 2}+1)x^2+4\sqrt{2}k_1^2x+4k_1^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{4\sqrt{2}k_1^2}{2k_1^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k_1^2-4}{2k_1^2+1}$………8 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(-\dfrac{4\sqrt{2}k_1^2}{2k_1^2+1})^2-4\cdot\dfrac{4k_1^2-4}{2k_1^2+1}}=\dfrac{4k_1^2+4}{2k_1^2+1}$………9 分

同理可得：$|MN|=\dfrac{4k_2^2+4}{2k_2^2+1}$………10 分

$\because k_2=-\dfrac{1}{2k_1}$，$\therefore |MN|=\dfrac{4k_2^2+4}{2k_2^2+1}=\dfrac{4(-\dfrac{1}{2k_1})^2+4}{2(-\dfrac{1}{2k_1})^2+1}=\dfrac{8k_1^2+2}{2k_1^2+1}$………11 分

$\therefore |AB|+|MN|=\dfrac{4k_1^2+4}{2k_1^2+1}+\dfrac{8k_1^2+2}{2k_1^2+1}=6$ 为定值………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=me^{-mx}+\ln x$（$m>0$）.

(1)求证：曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率恒大于 0；

(2)讨论 $f(x)$ 极值点的个数.

解：(1) $\because f'(x)=-m^2e^{-mx}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{e^{mx}-m^2x}{xe^{mx}}$（$x>0$），$\therefore f'(1)=\dfrac{e^m-m^2}{e^m}$………1 分

令 $\varphi(m)=e^m-m^2$（$m>0$），则 $\varphi'(m)=e^m-2m$，$\varphi''(m)=e^m-2$，

易知 $\varphi''(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $\varphi''(\ln 2)=e^{\ln 2}-2=0$………2 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$\varphi''(m)<0$，$\varphi'(m)$ 单调递减，当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi''(m)>0$，$\varphi'(m)$ 单调递增，

$\therefore \varphi'(m)\ge\varphi'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，$\therefore \varphi(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增………3 分

$\therefore \varphi(m)>\varphi(0)=1>0$，$\therefore f'(1)>0$，即曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率恒大于 0………4 分

(2) 令 $g(x)=e^{mx}-m^2x$（$x>0$），则 $g'(x)=m(e^{mx}-m)$，

显然 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\ln m}{m}$………5 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,\dfrac{\ln m}{m})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(\dfrac{\ln m}{m},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(\dfrac{\ln m}{m})=m(1-\ln m)$………6 分

①当 $0<m\le e$ 时，$g(x)_{\min}\ge 0$，$\therefore g(x)\ge 0$，$f'(x)\ge 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值

点………7 分

②当 $m>\mathrm{e}$ 时，$g(x)_{\min}<0$，

$\because g(0)=1>0$，$g(\frac{\ln m}{m})<0$，所以存在唯一的 $x_1\in(0,\frac{\ln m}{m})$，使得 $g(x_1)=0$，即 $f'(x_1)=0$ ………8 分

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)>g(x_1)=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_1,\frac{\ln m}{m})$ 时，$g(x)<g(x_1)=0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

$\therefore x_1$ 是 $f(x)$ 的极大值点………9 分

又 $g(1)=\mathrm{e}^m-m^2$，由(1)知 $g(1)>0$，且当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>x^2>x$，$\because m>\mathrm{e}$，$\therefore \ln m>1$，$\therefore \mathrm{e}^{\ln m}>\ln m$，

即 $m>\ln m$，$\therefore \frac{\ln m}{m}<1$，

所以存在唯一的 $x_2\in(\frac{\ln m}{m},1)$，使得 $g(x_2)=0$，即 $f'(x_2)=0$ ………10 分

当 $x\in(\frac{\ln m}{m},x_2)$ 时，$g(x)<g(x_2)=0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)>g(x_2)=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递曾，

$\therefore x_2$ 是 $f(x)$ 的极小值点………11 分

综上所述，当 $0<m\le\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $m>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 有一个极大值点和一个极小值点.

………12 分

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$（$\alpha$ 为直线 l 的倾斜角）.

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

(2) 设 $P(0,1)$，直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$ 的最大值.

解：(1) 由 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$，得 $\rho(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=\cos\alpha$ ………1 分

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得直线 l 的直角坐标方程为 $x\sin\alpha-y\cos\alpha+\cos\alpha=0$ ………2 分

由 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），两式相除得 $t=\dfrac{y}{x}(x\ne0)$ ………3 分

$\therefore x=\dfrac{2}{1+(\frac{y}{x})^2}$，整理得曲线$C$的普通方程为$(x-1)^2+y^2=1$（$x\neq 0$）………4 分

(2)解法一：直线l经过点$P(0,1)$，$\therefore l$的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），

代入$(x-1)^2+y^2=1$中，得$t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$………5 分

由$\Delta=4(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-4>0$，得$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$………6 分

$\therefore t_1+t_2=2(\cos\alpha-\sin\alpha)$，$t_1t_2=1$………7 分

$\therefore \dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{t_1t_2}=\sqrt{-4\sin 2\alpha}$………8 分

$\because \alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore 2\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\therefore -1\le\sin 2\alpha<0$，$\therefore \dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}\le 2$，

当且仅当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$时，等号成立………9 分

故$\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$的最大值为2………10 分

解法二：直线l经过点$P(0,1)$，$|PO|=1$………5 分

由切割线定理得$|PA|\cdot|PB|=|PO|^2=1$………7 分

$\therefore \dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}=|AB|\le 2$，当且仅当$AB$为圆$C$的直径时，等号成立………9 分

故$\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$的最大值为2………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知a,b,c均为正实数，且$a^2+b^2+c^2=2$.

(1)求$a+b+c$的最大值；

(2)求$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$的最小值.

解：(1)$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

又$2ab\leqslant a^2+b^2$，$2bc\leqslant b^2+c^2$，$2ca\leqslant c^2+a^2$………1 分

$\therefore (a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=6$………2 分

$\therefore a+b+c\leqslant\sqrt{6}$，当且仅当$a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，等式成立………3 分

即$a+b+c$的最大值为$\sqrt{6}$………4 分

(2)令$m=a+b$，$n=b+c$，$p=c+a$，则$(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)=3+\dfrac{n}{m}+\dfrac{p}{m}+\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{n}+\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}$

………5 分

$\because \dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\geqslant 2$，$\dfrac{p}{m}+\dfrac{m}{p}\geqslant 2$，$\dfrac{p}{n}+\dfrac{n}{p}\geqslant 2$，$\therefore (\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)\geqslant 9$，

当且仅当$m=n=p$，即$a=b=c$时，等式成立………6 分

由(1)知$m+n+p=2(a+b+c)\leqslant 2\sqrt{6}$，$\therefore (\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)\leqslant 2\sqrt{6}(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})$………7 分

$\therefore 2\sqrt{6}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p})\geqslant 9$，$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\geqslant \frac{3\sqrt{6}}{4}$………8 分

即 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant \frac{3\sqrt{6}}{4}$，当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，等式成立………9 分

故 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$………10 分