四省名校 西工大附中 西安铁一中 湖南外国语学校 郑州一中 合肥一中 合肥八中 江西师大附中 南昌五中 联合命题

华大新高考联盟2023年名校高考预测卷(新教材卷)

数　　学

审订单位:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,共22题。满分150分,考试用时120分钟

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x|3x^2-5x-8<0\}$, $B=\{x|y=\sqrt{-x^2+4x+5}\}$, 则 $A\cap B=$

A. $(-1,1)$　　B. $\left[-1,\frac{8}{3}\right)$　　C. $\left(-1,\frac{8}{3}\right)$　　D. $\left(1,\frac{8}{3}\right)$

2. 为了迎接学校即将到来的某项活动,某班组织学生进行卫生大扫除,班主任将班级中的9名同学平均分配到三个包干区(编号1,2,3)进行卫生打扫,其中甲同学必须打扫1号包干区,则不同的分配方法有

A. 560种　　B. 280种　　C. 840种　　D. 1 120种

3. 设 $m\in\mathbf{R}$,则"$m=2$"是"$\frac{5-m\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+m\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}\right)(3+4\mathrm{i})$为纯虚数"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=x^{\alpha}$, $g(x)=x^{\beta}$,其中 $x\in[0,+\infty)$, $0<\alpha<1$, $\beta>1$.若点 $M\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $N\left(\frac{1}{4},f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, $P\left(\frac{1}{2},g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $Q\left(\frac{1}{4},g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$满足 $|MP|=|NQ|$,则

A. $4^{\alpha}+4^{\beta}=2^{\alpha+\beta}$　　B. $4^{\alpha}+4^{\beta}=2^{\alpha+\beta}$ [illegible]

C. $2^{\alpha}-2^{\beta}=2^{\alpha+\beta}$　　D. $2^{\alpha}+2^{\beta}=2^{\alpha+\beta}$

5. 已知首项为3的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_nS_{n+1}+2=a_{n+1}(S_n-2)$,则$S_{[illegible]}=$

A. 1 435　　B. 1 436　　C. $\frac{8\ 603}{6}$　　D. $\frac{4\ 307}{3}$

版权声明:本试题卷为华中师范大学出版社正式出版物,版权所有,盗版必究。

6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E,F 分别是线段 CD,AD 上靠近点 D,A 的三等分点，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$

A. $\frac{64}{9}$　　B. $-\frac{64}{9}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. $-\frac{16}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^{x}+2}-\frac{2}{4^{x}+4}+|1-x|$ [illegible]，则不等式 $f(2x+3)>f(x)$ 的解集为

A. $(-2,1)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-1,1)\cup(3,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-5,2)\cup(3,+\infty)$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M,N 在双曲线 C 上，$P(-a,0)$，若 $\triangle PMN$ 为等边三角形，且 $|PF_1|=|F_1M|=|F_1N|$，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$

C. $y=\pm x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知在边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在线段 B_1D_1 上（含端点位置），现有如下说法：①$CM\parallel$ 平面 A_1BD；②$CM\perp AC_1$；③点 M 到平面 ABC_1D_1 的距离的最大值为 1；④$\triangle A_1BD$ 为等边三角形. 则正确的说法为

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

10. 已知正数 a,b,c 满足 $a,b,c\neq1$，$a<b<c$ 且 $a^2+b^2=c^2$，记 $m=\log_c(a^x+b^x)$，$n=\log_c(c^x-a^x)$，则下列说法正确的是

A. 若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则 $\forall x\in(1,+\infty)$，都有 $m<n<x$

B. 若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则 $\forall x\in(0,1)$，都有 $n<x<m$

C. 若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $|m-x|\le|n-x|\le|m-n|$

D. 若 $a,b,c\in(0,1)$，则 $\forall x\in[2,+\infty)$，都有 $|n-x|\le|m-x|\le|m-n|$

11. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sin x+\cos x)$，则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减

C. 若 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{2}$，则 x_1-x_2 的值可以是 $\frac{3\pi}{2}$

D. 函数 $g(x)=4f(x)-x$ 有 4 个零点

12. 已知 $\lambda>0$，若关于 x 的方程 $\frac{e^{x-1}}{x}-\lambda x+\lambda\ln(\lambda x)=0$ 存在正零点，则实数 λ 的值可能为

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. e　　D. 2

版权声明：本试题卷为华中师范大学出版社正式出版物，版权所有，盗版必究。

微信号

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 为了反映城市的人口数量 x 与就业压力指数 y 之间的变量关系，研究人员选择使用非线性回归模型 $y=e^{bx+a}$ 对所测数据进行拟合，并设 $z=\ln y$，得到的数据如表所示，则 $a=$______.

x	4	6	8	10
z	2	3	5	6

14. 若 [illegible]，则当 λ 取得最小值时，$a=$______.

15. 阿基米德在他的著作《关于圆锥体和球体》中计算了一个椭圆的面积．当我们垂直地缩小一个圆时，我们得到一个椭圆，椭圆的面积等于圆周率 π 与椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的面积为 $2\sqrt{3}\pi$，点 P 在椭圆 C 上，且点 P 与椭圆 C 左、右顶点连线的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，记椭圆 C 的两个焦点分别为 F_1,F_2，则 $|PF_1|$ 的值可能为______．（横线上写出满足条件的一个值）

16. 已知在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=BC$，$BD=CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}AD=2$，点 E 在 $\triangle ABC$ 内运动（含边界位置），记平面 ABC 与平面 BCD 所成的角为 α，若 $2S_{\triangle BCE}\cdot\sin\alpha=3S_{\triangle ADE}\cdot\sin\angle DAE$，则 $S_{\triangle BCE}$ 的最大值为______.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

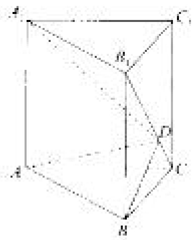
17.（10分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，其中 $\tan 2C=-\frac{3}{4}$，C 为钝角，且 $\frac{b}{a}\cos A=2\cos B$．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为6，求 $\triangle ABC$ 的周长．

18.（12分）



已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 如图所示，其中 $\angle CAB=45°$，$CA=AA_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，点 D 在线段 B_1C 上（不含端点位置）．

（1）若 $B_1D=2CD=2\sqrt{2}$，求点 A_1 到平面 ABD 的距离；

（2）若平面 ABD 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求直线 A_1B 与平面 ABD 所成角的正弦值．

19.（12分）

在数学研究性学习课程上，老师和班级同学玩了一个游戏．老师事先准备3张一模一样的卡片，编号为1，2，3后，放入一个不透明的袋子中，再准备若干枚1元硬币与5角硬币和一个储蓄罐，然后邀请同学从袋子中有放回地抽取1张卡片，若抽到的卡片编号为1或2，则将1枚1元硬币放入储蓄罐中，若抽到的卡片编号为3，则将2枚5角硬币放入储蓄罐中，如此重复 k 次试验后，记储蓄罐中的硬币总数量为 S_k．

（1）若 $k=3$，求 $S_3=5$ 的概率；

（2）若 $k=5$，记第 $n(n=1,2,3,4,5)$ 次抽卡且放置硬币后，5角硬币的数量为 X_n，1元硬币的数量为 Y_n，求在 $S_5=7$ 的条件下 $X_5=Y_5$ 的概率．

版权声明：本试题卷为华中师范大学出版社正式出版物，版权所有，盗版必究。

微信号

20.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n=\frac{S_n+1}{2}$，首项为1的正项数列$\{b_n\}$满足$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(a_n+b_n)^2$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{(2n-1)b_n\}$的前n项和T_n.

21.（12 分）

已知圆C_1过点([illegible])，$(-1,2)$，$(1,0)$，抛物线C_2：$y^2=2px\ (p>0)$过点$A\left(\frac{1}{4},1\right)$.

（1）求圆C_1的方程以及抛物线C_2的方程；

（2）过点A作抛物线C_2的切线l与圆C_1交于P、Q两点，点B在圆C_1上，且直线BP、BQ均为抛物线C_2的切线，求满足条件的所有点B的坐标.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=e^x-ax^2$.

（1）若函数$f(x)$在[illegible]上有两个零点，求实数a的取值范围.

（2）探究：是否存在正数a，使得$F(x)=$[illegible]在R上单调递增，若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由.

版权声明：本试题卷为华中师范大学出版社正式出版物，版权所有，盗版必究.

机密★启用前(新教材卷)

华大新高考联盟2023年名校高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【命题立意】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法、二次函数的值域,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x\mid(3x-8)(x+1)<0\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{8}{3}\right\}$,$B=\{y\mid y=(x-2)^2+1\}=\{y\mid y\geqslant1\}$,故$A\cap B=\left[1,\frac{8}{3}\right)$,故选B.

2.【答案】A

【命题立意】本题考查排列组合,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】第一步,将9名同学平均分成3组,共有$\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}$种分法;第二步,含有甲的分组打扫1号包干区,其他两组分别负责2、3号包干区,共有A_2^2种分法;由分步乘法计数原理可知,所有分配方法共$\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}\cdot A_2^2=560$种,故选A.

3.【答案】C

【命题立意】本题考查复数的运算、复数的概念、充要条件的判定,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{3+m^2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+m^2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{6-m^2}{5}+\frac{3+2m^2}{5}\mathrm{i}$,$\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}\right)(3+4\mathrm{i})=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}+\frac{3}{5}\mathrm{i}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$,故$\frac{3+m^2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+m\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}\right)(3+4\mathrm{i})=\frac{6-m-m^2}{5}+\frac{3+2m^2+7m}{5}\mathrm{i}$,若该式为纯虚数,则$\begin{cases}6-m-m^2=0,\\3+2m^2+7m\neq0,\end{cases}$解得$m=2$,故选C.

4.【答案】D

【命题立意】本题考查幂函数的图象与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为$|MP|=|NQ|$,且$0<\alpha<1$,$\beta>1$,故$\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{2^\beta}=\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{4^\beta}=\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{2^\beta}\right)\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}\right)$,故$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}=1$,则$2^\alpha+2^\beta=2^{\alpha+\beta}$,故选D.

5.【答案】D

【命题立意】本题考查数列的递推公式、数列的周期性,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

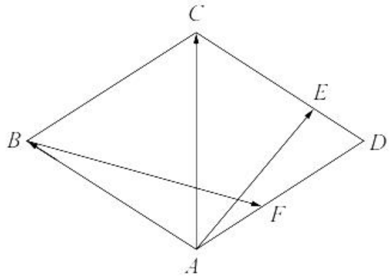
【解析】依题意,$a_nS_{n+1}-a_nS_n+2=2a_n$,则$a_{n+1}=2-\frac{2}{a_n}$,而$a_1=3$,故$a_2=\frac{4}{3}$,$a_3=\frac{1}{2}$,$a_4=-2$,$a_5=3$,…,故数列$\{a_n\}$的周期为4,而$a_1+a_2+a_3+a_4=3+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+(-2)=\frac{17}{6}$,故$S_{2\,023}=505\times\frac{17}{6}+3+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4\,307}{3}$,故选D.

6.【答案】A

【命题立意】本题考查平面向量的基本定理、平面向量的数量积,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心

素养.

【解析】作出图形如图所示,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8$,故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-8$;而$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{64}{9}$.



故选A.

7.【答案】B

【命题立意】本题考查函数的图象与性质、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$x\neq1$,$f(x)=\frac{2^x}{4^x-4}+\frac{x}{x-1}$,故$f(1+x)+f(1-x)=\frac{2^{x+1}}{4^{x+1}-4}+1+\frac{1}{x}+\frac{2^{1-x}}{4^{1-x}-4}+1-\frac{1}{x}$ $=\frac{2^{x+1}}{4^{x+1}-4}+\frac{2^{x+1}}{4-4^{x+1}}+2=2$,故函数$f(x)$的图象关于$(1,1)$中心对称,而$f(2x+3)>f(x^2)$,故$2x+3<x^2<1$或$x^2<1<2x+3$或$1<2x+3<x^2$,解得$-1<x<1$或$x>3$,故所求不等式的解集为$(-1,1)\cup(3,+\infty)$,故选B.

8.【答案】D

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】由双曲线的对称性可知,点M,N在双曲线C的右支上,且$\angle MPF_2=30^\circ$;又$|F_2P|=|F_2M|=a+c$,故$\angle PF_2M=120^\circ$,连接F_1M,则$|F_1M|-|F_2M|=2a$,故$|F_1M|=3a+c$,在$\triangle MF_1F_2$中,由余弦定理可得$|F_1M|^2=|F_1F_2|^2+|F_2M|^2-2|F_1F_2||F_2M|\cos120^\circ$,即$(3a+c)^2=(2c)^2+(a+c)^2-2\times2c\times(a+c)\times\cos120^\circ$,整理得$4a^2+ac-3c^2=0$,解得$\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$,故$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$,故双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$.

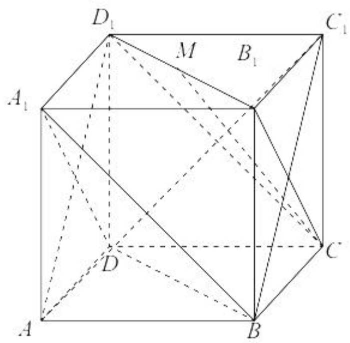
故选D.

二、选择题

9.【答案】ABD

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为平面A_1BD//平面CB_1D_1,所以CM//平面A_1BD,故①正确;因为$AC_1\perp$平面CB_1D_1,$CM\subset$平面CB_1D_1,故$CM\perp AC_1$,故②正确;当点M在端点B_1时,点M到平面ABC_1D_1的距离为最大值$\sqrt{2}$,故③错误;④明显正确,故选ABD.



10.【答案】BCD

【命题立意】本题考查指对数函数的图象与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】令$m-x=\log_c(a^x+b^x)-\log_c c^x=\log_c\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x\right]=f(x)$,因为$y=\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x$在定义域上单调递减,$y=\log_c x$在定义域上单调递增,故$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,故$f(x)<f(1)=\log_c1=0$,故$m-x<0$,即$m<x$;令$n-x=\log_b(c^x-a^x)-\log_b b^x=\log_b\left[\left(\frac{c}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^x\right]=g(x)$,因为$y=\left(\frac{c}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^x$在定义域上单调递增,$y=\log_b x$在定义域上单调递增,故$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$g(x)>g(1)=\log_b1=0$,故$n-x>0$,即$n>x$,综上所述,若$a,b,c\in(1,+\infty)$,则$\forall x\in(1,+\infty)$,都有$1<m<x<n$,故A错误;同理可得,B正确;若$x=1$,则$|m-x|=|n-x|=|m-n|=0$;若$x>1$,由①的推论

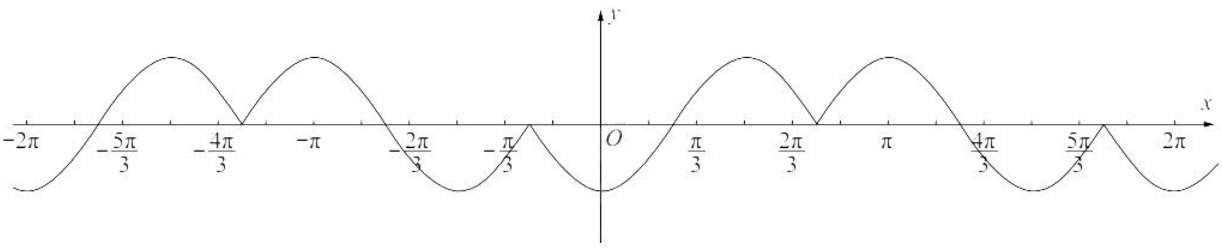
官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

可知，$n>x>m>1$，则 $|n-x|<|m-n|$，而 $c^m-b^x=c^x-b^n=a^x$，故 $\dfrac{c^m-b^x}{b^m}>\dfrac{c^x-b^n}{b^x}$，则 $\left(\dfrac{c}{b}\right)^m-b^{x-m}>\left(\dfrac{c}{b}\right)^x-b^{n-x}$，故 $b^{x-m}<b^{n-x}$，故 $0<x-m<n-x$，故 $|m-x|<|n-x|<|m-n|$；若 $0<x<1$，同理可得，$|m-x|<|n-x|<|m-n|$；故若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $|m-x|\leqslant|n-x|\leqslant|m-n|$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，则 C 正确；同理可得，D 正确. 故选 BCD.

11.【答案】ABC

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot|\sin x+\cos x|=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, & -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi,\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，观察可知，A、B 正确；若 $f(x_1)+f(x_2)=-\sqrt{2}$，可以取 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{3\pi}{2}$，故 C 正确；由于 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{x}{4}$ 有 5 个交点，故函数 $g(x)=4f(x)-x$ 有 5 个零点，故 D 错误. 故选 ABC.



12.【答案】CD

【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$\dfrac{e^{x-1}}{\lambda x}-x+\ln(\lambda x)=\dfrac{e^{x-1}}{e^{\ln(\lambda x)}}-x+\ln(\lambda x)=e^{x-\ln(\lambda x)-1}-[x-\ln(\lambda x)]=0$，令 $t=x-\ln(\lambda x)$，故问题转化为 $e^{t-1}-t=0$ 有解. 设 $h(t)=e^{t-1}-t$，则 $h'(t)=e^{t-1}-1$，故当 $t\in(-\infty,1)$ 时，$h'(t)<0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，而 $h(1)=0$，所以 $h(t)$ 存在唯一零点 $t=1$，即 $1=x-\ln(\lambda x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有解，即 $1+\ln\lambda=x-\ln x$，令 $p(x)=x-\ln x$，则 $p'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，故函数 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $1+\ln\lambda\geqslant p(1)=1$，解得 $\lambda\geqslant1$，故实数 λ 的取值范围为 $[1,+\infty)$，故选 CD.

三、填空题

13.【答案】3.

【命题立意】本题考查回归直线方程及其应用，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，$z=\ln y=\ln(e^{-\frac{9}{10}}\cdot e^{\frac{7}{10}x})=\dfrac{7}{10}x-\dfrac{9}{10}$；而回归直线方程 $z=\dfrac{7}{10}x-\dfrac{9}{10}$ 过点 $\left(7,\dfrac{13+c}{4}\right)$，故 $\dfrac{13+c}{4}=\dfrac{7\times7}{10}-\dfrac{9}{10}$，解得 $c=3$.

14.【答案】$\log_3\dfrac{3}{2}$.

【命题立意】本题考查基本不等式，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意 $\lambda\geqslant3^q(3-3^q)$，而 $3^q(3-3^q)\leqslant\dfrac{(3^q+3-3^q)^2}{4}$，当且仅当 $3^q=\dfrac{3}{2}$，即 $q=\log_3\dfrac{3}{2}$ 时等号成立.

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

15.【答案】13.(答案正确皆可给分)

【命题立意】本题考查椭圆的方程与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,得$\begin{cases} ab=21, \\ -\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{9}{49}, \end{cases}$解得 $a=7,b=3$,则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{10}$,故 $7-2\sqrt{10}=a-c\leqslant |PF_1|\leqslant c+a=2\sqrt{10}+7$,故写出的值在此范围内即可.

16.【答案】$4\sqrt{3}-6$.

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,设点 E 到 BC 的距离为 h,则$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCE}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot \sin\angle DAE}{\frac{1}{2}BC\cdot h}=\dfrac{3\sin\angle DAE}{4\sin\alpha}$,即 $EA=h$,故点 E 的轨迹为以点 A 为焦点、BC 为准线的抛物线在 $\triangle ABC$ 内的一段弧,故点 E 到 BC 的距离 h 的最大值为 $4\sqrt{3}-6$,故 $(S_{\triangle BCE})_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot h_{\max}=4\sqrt{3}-6$.

四、解答题

17.【命题立意】本题考查正余弦定理、三角形的面积公式,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,有 $b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$,

由正弦定理,得 $\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$,则 $\tan B=2\tan A$;……(1 分)

$\because \tan 2C=\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=\dfrac{3}{4}$,$\therefore 3\tan^2 C+8\tan C-3=0$,

$\because C$ 为钝角,$\therefore \tan C=-3\left(\tan C=\dfrac{1}{3}\text{舍去}\right)$. ……(2 分)

$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\dfrac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$,……(3 分)

解得 $\tan B=1$($\tan B=-2$ 舍去),即 $B=\dfrac{\pi}{4}$. ……(4 分)

(2)$\because \tan C=-3$,$\therefore \sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,$\cos C=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$; ……(5 分)

$\because A+B+C=\pi$,$\therefore A=\pi-(B+C)$,

$\therefore \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……(7 分)

由正弦定理,得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,$a=\dfrac{c\cdot\sin A}{\sin C}$,$\therefore a=c\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{10}{3\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}c$. ……(8 分)

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}c\times c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{c^2}{6}=6$,解得 $c=6$,$a=2\sqrt{2}$,……(9 分)

由正弦定理,得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,$\therefore b=\dfrac{c\cdot\sin B}{\sin C}=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{10}{3\sqrt{10}}=2\sqrt{5}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6$. ……(10 分)

18.【命题立意】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,

得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle CAB=AC^2$,则 $BC=AC$,……(1 分)

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

而 $B_1C=3\sqrt{2}$，故 $CA=AA_1=3$，$AB=3\sqrt{2}$．

而 $BD=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{11}$，故 $\cos\angle ADB=\dfrac{5+11-18}{2\sqrt{55}}=-\dfrac{1}{\sqrt{55}}$，则 $\sin\angle ADB=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}$．

故 $S_{\triangle ADB}=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DB\cdot\sin\angle ADB=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$． ……………………………（3分）

因为 $V_{A_1-ABD}=V_{D-A_1AB}$，所以 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$，解得 $h=\sqrt{6}$． ……………………………（5分）

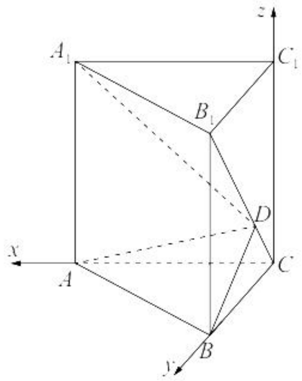
(2)以点 C 为坐标原点，CA，CB，CC_1 所在的直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$，不妨设 $CA=CC_1=3$，故 $A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$B_1(0,3,3)$，$A_1(3,0,3)$． ……………………………（6分）

设 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=(0,3\lambda,3\lambda)$，则 $D(0,3\lambda,3\lambda)$，则 $\overrightarrow{AD}=(-3,3\lambda,3\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABD 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}-x+\lambda y+\lambda z=0,\\ x-y=0.\end{cases}$

令 $x=\lambda$，则 $z=1-\lambda$，故 $\boldsymbol{n}=(\lambda,\lambda,1-\lambda)$ 为平面 ABD 的一个法向量．

……………………………………………………………（8分）



而 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量． ……………………………（9分）

故 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2}}$，解得 $3\lambda^2-8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$（$\lambda=2$ 舍去）．

……………………………………………………………（10分）

故 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-3,2,-1)$．

故直线 A_1D 与平面 ABD 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1D}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$．

……………………………………………………………（12分）

19.【命题立意】本题考查相互独立事件的概率、条件概率，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养．

【解析】(1)"$S_4\leqslant 5$"表示储蓄罐中有 4 枚 1 元硬币或 3 枚 1 元硬币和 2 枚 5 角硬币．

故所求概率 $P=1-C_4^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{33}{81}$． ……………………………（4分）

(2)依题意，$S_5\geqslant 7$ 的概率为 $P=1-C_5^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{131}{243}$． ……………………………（6分）

若有 2 次抽到 3 号卡，即 2 次放置 5 角硬币，3 次放置 1 元硬币，则在前 3 次中放了 2 次 1 元和 1 次 5 角，后 2 次放了 1 次 1 元和 1 次 5 角，即 2 次放 5 角，一次在前 3 次，另一次在后 2 次，

故其概率为 $C_3^1\times C_2^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{48}{243}$； ……………………………（8分）

若有 3 次抽到 3 号卡，即 3 次放置 5 角硬币，2 次放置 1 元硬币，必须在前 3 次放了 2 次 1 元和 1 次 5 角，后 2 次放了 2 次 5 角，即 2 次放 1 元都在前 3 次，故所求概率为 $C_3^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{243}$，其他情况不可能使得 $X_n=Y_n$． ……………………………（10分）

故 $P(X_n=Y_n)=\dfrac{\dfrac{48}{243}+\dfrac{12}{243}}{\dfrac{131}{243}}=\dfrac{60}{131}$． ……………………………（12分）

20.【命题立意】本题考查数列的通项公式、错位相减法，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养．

【解析】(1)当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{S_1+1}{2}$，解得 $a_1=1$； ……………………………（1分）

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{S_n+1}{2}$，$a_{n-1}=\frac{S_{n-1}+1}{2}$，两式相减可得，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$。…………（2分）

故数列$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，故 $a_n=2^{n-1}$。…………（3分）

记 $R_n=b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n=(2^{n-1}b_n)^n$，故当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{R_n}{R_{n-1}}=\frac{(2^{n-1}b_n)^n}{(2^{n-2}b_{n-1})^{n-1}}$，

即 $b_n=\frac{2^{n(n-1)}(b_n)^n}{2^{(n-1)(n-2)}(b_{n-1})^{n-1}}$，故 $\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1}=\frac{2^{(n-1)(n-2)}}{2^{n(n-1)}}=\frac{1}{4^{n-1}}$。

因为 $b_n>0$，故 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{4}$。

故数列$\{b_n\}$是以1为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，故 $b_n=\frac{1}{4^{n-1}}$。…………（6分）

（2）依题意，$(2n-1)b_n=\frac{2n-1}{4^{n-1}}$。…………（7分）

故 $T_n=1\cdot\frac{1}{4^0}+3\cdot\frac{1}{4^1}+5\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{2n-1}{4^{n-1}}$。

故 $\frac{1}{4}T_n=1\cdot\frac{1}{4^1}+3\cdot\frac{1}{4^2}+5\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{2n-1}{4^n}$。

故 $\frac{3}{4}T_n=2\cdot\frac{1}{4^0}+2\cdot\frac{1}{4^1}+2\cdot\frac{1}{4^2}+2\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+2\cdot\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{2n-1}{4^n}-1=\frac{5}{3}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4^n}-\frac{2n-1}{4^n}$。……（10分）

故 $T_n=\frac{20}{9}-\left(\frac{5}{9}+\frac{2n}{3}\right)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$。…………（12分）

21.【命题立意】本题考查抛物线的方程、圆的方程、直线与抛物线的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养。

【解析】（1）设圆 $C_1: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

故$\begin{cases}9-3D+F=0,\\5-D+2E+F=0,\\1+D+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=2,\\E=0,\\F=-3,\end{cases}$ 故圆 $C_1: x^2+y^2+2x-3=0$。…………（3分）

将 $A\left(\frac{1}{4},1\right)$ 代入 $y^2=2px$ 中，解得 $p=2$，故抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4x$。…………（4分）

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，设切线 $l_{BP}: x-x_1=t_1(y-y_1)$，$l_{BQ}: x-x_2=t_2(y-y_2)$，

过抛物线 C_2 上点 $A\left(\frac{1}{4},1\right)$ 的切线方程为 $y=2x+\frac{1}{2}$，

即 $l_{PQ}: x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}$，记 $t_0=\frac{1}{2}$。①…………（5分）

设过点 P 的直线 $x-x_1=t_1(y-y_1)$ 与抛物线 C_2 相切，代入抛物线方程 $y^2=4x$，

得 $y^2-4t_1y+4t_1y_1-4x_1=0$。

则 $\Delta=16t_1^2-16(t_1y_1-x_1)=0$，即 $t_1^2-y_1t_1+x_1=0$，所以 $\frac{1}{2}t_1=x_1$，$\frac{1}{2}+t_1=y_1$，…………（7分）

$t_1=2x_1=y_1-\frac{1}{2}$，所以 $2y_1=4x_1+1$，②，同理可得 $t_2=2x_2$，

所以切线 $l_{BP}: x-x_1=2x_1(y-y_1)$，$l_{BQ}: x-x_2=2x_2(y-y_2)$，

联立两式消去 y，可得 $x_B=2x_1x_2\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=4x_1x_2$，③…………（9分）

代入 l_{BP} 可得 $y_B=\frac{4x_2-1+2y_1}{2}$，④

代入②得 $y_B=2(x_1+x_2)$，

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。