THUSSAT 中学生标准学术能力测试

中学生标准学术能力测试诊断性测试 2020 年 1 月测试

文科数学（一卷）答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	D	A	B	B	B	C	B	A	D	C

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $[-1,0)\cup(0,1]$

14. $(0,2]\cup\{4\}$

15. $(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

16. $\dfrac{1}{4}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17. 解：记 A 表示事件：考生选择生物学科

B 表示事件：考生选择物理但不选择生物学科；

C 表示事件：考生至少选择生物、物理两门学科中的 1 门学科；

D 表示事件：选择生物但不选择物理

E 表示事件：同时选择生物、物理两门学科

（1）$P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，$C=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$ ………………………………2 分

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.7$ ………………………………5 分

（2）由某校高二段 400 名学生中，选择生物但不选择物理的人数为 140，

可知 $P(D)=0.35$ ………………………………7 分

因为 $D\cup E=A$ ………………………………9 分

$P(E)=P(A)-P(D)=0.5-0.35=0.15$ ………………………………12 分

18．解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差为 d（$d \neq 0$），

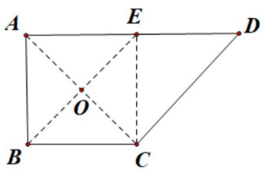
由题意得$\begin{cases} a_1 = 1 \\ {a_2}^2 = a_1 a_5 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$ ……………………………3 分

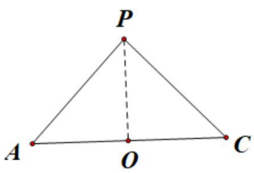
所以$a_n = 2n-1, S_n = n^2$ ……………………………6 分

（2）因为$b_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2-1} = \dfrac{1}{4n(n+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ ……………………………9 分

所以$T_n = \dfrac{n}{4(n+1)}$ ……………………………12 分

19．解（1）





由已知$AP \perp$面PCD，可得$AP \perp PC$，$AP \perp CD$，

由题意得，$ABCD$为直角梯形，如图所示，易得$BE // CD$,所以，$AP \perp BE$.

又因为 BE⊥AC，所以 BE⊥⊥面APC,故 BE⊥ PO. ……………………………3 分

在直角梯形$ABCD$中，$AC = \sqrt{2}$，$AB = \sqrt{2}AP$，$AP \perp PC$ ，

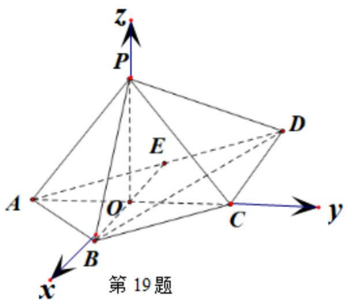
所以ΔPAC为等腰直角三角形，O 为斜边 AC 上的中点，所以$PO \perp AC$.

$\because BE \cap AC = O, BE \subset$面ABCD，所以$PO \perp$平面$ABCD$ ……………………………6 分

（2）法一：以O为原点，分别以OB，OC，OP 为x轴，y轴，z轴的建立直角坐标系.

不妨设$BO = 1$

A(0,-1,0)， B(1,0,0), P (0,0,1), D(-2,1,0),



第 19 题

设$\vec{n} = (x, y, z)$是平面PBD的法向量.

满足$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$,所以$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$，则令$x = 1$，解得

$\vec{n} = (1, 3, 1)$ …………9 分

$\sin\theta = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \right\rangle\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$ ……………………………12 分

法二：（等体积法求 A 到平面 PBD 的距离）

设AB=1，点A到平面PBD的距离为h，计算可得PB=1,PD=$\sqrt{3}$，BD=$\sqrt{5}$，$S_{\Delta PBD}=\frac{\sqrt{11}}{4}$

$V_{A-PBD}=V_{P-ABD}$ ……………………………9 分

$\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta PBD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot PO, S_{\Delta ABD}=1, PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得$h=\frac{2}{11}\sqrt{22}$ ……………………………11 分

$\sin\theta=\frac{h}{AB}=\frac{2}{11}\sqrt{22}$ ……………………………12 分

20．解（1）$\ln x+\frac{a}{\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}$在$(0,1]$恒成立，得$a\ge x-\sqrt{x}\ln x$在$(0,1]$恒成立。

令$h(x)=x-\sqrt{x}\ln x$，则$h'(x)=\frac{2\sqrt{x}-\ln x-2}{2\sqrt{x}}$ ……………………………2 分

令$u(x)=2\sqrt{x}-\ln x-2$，则$u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\le 0$在$(0,1]$恒成立，

所以在$(0,1]$上，$u(x)\ge u(1)=0$，所以在$(0,1]$上$h'(x)\ge 0$，

所以$h(x)$在$(0,1]$上递增，所以在$(0,1]$上$h(x)\le h(1)=1$，所以$a\ge 1$ ……………………5 分

（2）即证：$\ln m\cdot\ln n-mn<\frac{1}{4}$，$m,n\in(0,1)$

由（1）知，$\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}$，即$-\ln x\le\frac{1-x}{\sqrt{x}}$，当且仅当$x=1$时取到等号，因为$m,n\in(0,1)$，

所以$0<-\ln m<\frac{1-m}{\sqrt{m}}=\frac{n}{\sqrt{m}}$，$0<-\ln n<\frac{1-n}{\sqrt{n}}=\frac{m}{\sqrt{n}}$，所以$\ln m\cdot\ln n<\sqrt{mn}$，……9 分

所以$\ln m\cdot\ln n-mn<\sqrt{mn}-mn=-\left(\sqrt{mn}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$，即$f(m)f(n)-g^2(m)g^2(n)<\frac{1}{4}$

成立 ……………………………12 分

21．解：（1）显然l的斜率存在且不为 0，

设$l: x=my+1$，则$l': mx+y-m=0$，

由题意，得$\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}\le 1\Rightarrow m\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$ ……………………………2 分

所以直线l'斜率的取值范围为$\left[\frac{-3-\sqrt{3}}{4},\frac{-3+\sqrt{3}}{4}\right]$. ……………………………4 分

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$联立方程组$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$，得

$y^2-4my-4=0$，即$y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$ ……………………………6 分

$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{16m^2+16}=4(m^2+1)$ ……………………7 分

O 到直线 AB 的距离为$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，

$\therefore S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times 4(m^2+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{m^2+1}$ ……………………………9 分

$\because m\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$，$\therefore m^2+1\in\left[\frac{14-3\sqrt{3}}{8},\frac{14+3\sqrt{3}}{8}\right]$,

$\because 14-3\sqrt{3}=\left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2, 14+3\sqrt{3}=\left(\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\therefore \sqrt{m^2+1}\in\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{4},\frac{3\sqrt{3}+1}{4}\right]$，即$S_{\Delta OAB}\in\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{2},\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right]$

所以ΔAOB面积的取值范围是$\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{2},\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right]$ ……………………………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）C_1的普通方程为$(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$， ……………………2 分

$\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\rho\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)=a$，即$x-\sqrt{3}y+2a=0$

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+2a=0$ ……………………5 分

（2）由于圆 C_1 的半径为 2，圆 C_1 上恰有一个点到直线 $x-\sqrt{3}y+2a=0$ 的距离为 1，所以

圆心 $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+2a=0$ 的距离为 3， ……………………7 分

由 $d=\dfrac{|1+3+2a|}{2}=3$，可得 $a=1$ 或 -5， ……………………9 分

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-10=0$ ……………………10 分

23.【选修 4–5：不等式选讲】

（1）解：原不等式化为 $|x+1|-|2x-5|+\sqrt{2}-1>0$

当 $x>\dfrac{5}{2}$ 时，原不等式为 $x+1-(2x-5)+\sqrt{2}-1>0$ 得 $x<5+\sqrt{2}$，即 $\dfrac{5}{2}<x<5+\sqrt{2}$；

当 $-1\le x\le\dfrac{5}{2}$ 时，原不等式为 $x+1+(2x-5)+\sqrt{2}-1>0$ 得 $x>\dfrac{5-\sqrt{2}}{3}$，

即 $\dfrac{5-\sqrt{2}}{3}<x\le\dfrac{5}{2}$；

当 $x<-1$ 时，原不等式为 $-(x+1)+(2x-5)+\sqrt{2}-1>0$ 得 $x>7-\sqrt{2}$，与 $x<-1$ 矛盾；

所以解为 $\dfrac{5-\sqrt{2}}{3}<x\le 5+\sqrt{2}$ ……………………5 分

（2）函数的定义域为 $[2,3]$，且 $y>0$

$$y=3\sqrt{2}\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}$$

$$\le\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+2^2}\times\sqrt{(\sqrt{x-2})^2+(\sqrt{3-x})^2}=\sqrt{22}$$ ……………………9 分

$\therefore$ $y_{\max}=\sqrt{22}$，当且仅当 $3\sqrt{2}\sqrt{3-x}=2\sqrt{x-2}$，即 $x=\dfrac{31}{11}$ 时取到最大值…………10 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注