2024 届高三数学试题(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:小题按照必修 1,必修 4,必修 5,选修 2—1 第一章,选修 2—2 第一章出题,大题按照高考范围出题。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|(x-1)^2<4\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x|x<3\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(m+3,2m+1)$,$\overrightarrow{CD}=(m+3,-5)$,则"$|m|=2$"是"$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y+1\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ x+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的最小值为

A. -6　　B. -4　　C. -2　　D. 2

4. 若 $\tan(\alpha-\beta)=2$,$\tan\beta=4$,则 $\dfrac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=$

A. $-\dfrac{7}{5}$　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $-\dfrac{5}{7}$　　D. $\dfrac{5}{7}$

5. 若曲线 $y=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ 在 $x=m$ 处的切线的斜率为 3,则该切线在 x 轴上的截距为

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. 2　　C. ± 2　　D. $\pm\dfrac{2}{3}$

6. 已知 $f(x-5)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant m$ 时,$f(x)$ 单调递增,要确保 $f(x)$ 的零点唯一,则 m 的值可以为

A. -4　　B. 0　　C. -5　　D. 5

7. 定义矩阵运算 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}\lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8^{\frac{2}{3}}\\ 2^{-1}\end{bmatrix}=$

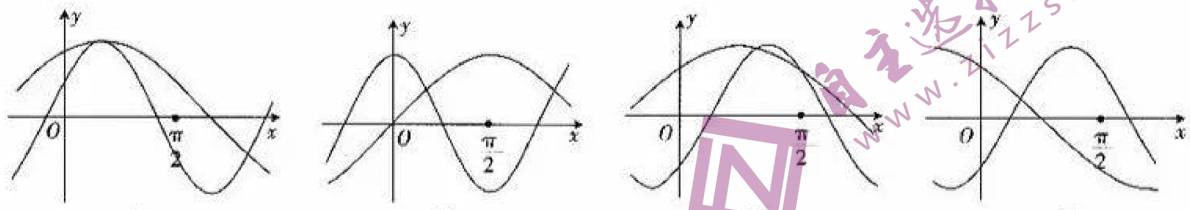
A. $\begin{pmatrix}\lg 20\\ 4\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\lg 20\\ 2\lg 50\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1\\ 2\lg 50\end{pmatrix}$

8. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，对角线 AC，BD 相交于点 O，若 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=10$，则 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=$

A. 12　　B. 10　　C. 6　　D. 5

9. 在同一直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 与 $g(x)=2\cos(x-\varphi)$ 的部分图象不可能为



A　　B　　C　　D

10. 某公司计划在 10 年内每年某产品的销售额(单位：万元)等于上一年的 1.2 倍再减去 2. 已知第一年(2022 年)该公司该产品的销售额为 100 万元，则按照计划该公司从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为(参考数据：$1.2^{10}\approx6.19$)

A. 2135.5 万元　　B. 2235.5 万元　　C. 2335.5 万元　　D. 2435.5 万元

11. 已知 $a+\log_2 a=4$，$b+\log_3 b=c+\log_4 c=3$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

12. 若 $\cos\frac{\pi}{5}$ 是关于 x 的方程 $ax^2-bx-1=0$(a，b 均为正整数)的一个实根，则 $a+b=$

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

第 II 卷

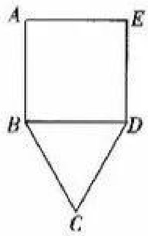
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 命题"若 $a+b=2$，则 a，b 不都小于 1"的逆否命题为 ▲ .

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，$a_2=2$，若 a_{2n-1}，a_{2n}，a_{2n+1} 成等差数列，a_{2n}，a_{2n+1}，a_{2n+2} 成等比数列，则 $a_8=$____▲____.

15. 将曲线 $y=\sin 4x$ 向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，得到曲线 $y=f(x)$，已知曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\cos(x+\frac{11\pi}{12})$ 都关于直线 $x=m(-\pi<m<2\pi)$ 对称，写出一个符合条件的 m 的值：____▲____.

16. 如图，已知平面五边形 $ABCDE$ 的周长为 12，若四边形 $ABDE$ 为正方形，且 $BC=CD$，则当 $\triangle BCD$ 的面积取得最大值时，$AB=$____▲____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

某工厂的工人生产内径为 28.50 mm 的一种零件，为了了解零件的生产质量，在某次抽检中，从该厂的 1000 个零件中抽出 60 个，测得其内径尺寸(单位：mm)如下：

28.51×13　　28.52×6　　28.50×4　　28.48×11

28.49×p　　28.54×1　　28.53×7　　28.47×q

这里用 $x\times n$ 表示有 n 个尺寸为 x mm 的零件，p,q 均为正整数. 若从这 60 个零件中随机抽取 1 个，则这个零件的内径尺寸小于 28.49 mm 的概率为 $\frac{4}{15}$.

(1)求 p,q 的值.

(2)已知这 60 个零件内径尺寸的平均数为 $\bar{x}$ mm，标准差为 s mm，且 $s=0.02$，在某次抽检中，若抽取的零件中至少有 80%的零件内径尺寸在 $[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$ 内，则称本次抽检的零件合格. 试问这次抽检的零件是否合格？说明你的理由.

18.(12 分)

a,b,c 分别为△ABC 内角 A,B,C 的对边，已知 $a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$.

(1)求 A；

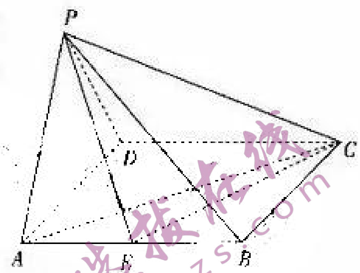
(2)若 D 在线段 BC 上，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$AD=3$，且△ABC 的面积 $S=3\sqrt{3}$，求△ABC 的周长.

19.(12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，△PAD 是正三角形，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 是 AB 的中点.

(1)证明：$AC\perp PE$.

(2)求二面角 $A-CE-P$ 的余弦值.



20.(12 分)

以坐标原点为对称中心，坐标轴为对称轴的椭圆过点 $C(0,-1)$，$D(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$.

(1)求椭圆的方程.

(2)设 P 是椭圆上一点(异于 C,D)，直线 PC,PD 与 x 轴分别交于 M,N 两点. 证明在 x 轴上存在两点 A,B，使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值，并求此定值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=2a\ln x-x+\frac{1}{x}$.

(1)若 $\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围;

(2)证明:$\forall n\in \mathbf{N}_+$,$3n+6(n+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[i(i-1)]<n(n+1)^2(n+2)$.

(二)选考题:共 10 分.请考生从第 22,23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,直线 l_1 的方程为 $y+4=0$,直线 l_2 的方程为 $x+4=0$.以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,圆 M 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta=11$,点 C 的极坐标为 $(4\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$.

(1)求点 C 的直角坐标与圆 M 的直角坐标方程(化为标准方程);

(2)若 P 为曲线 M 上任意一点,过点 P 作直线 l_1 的垂线,垂足为 A,过点 P 作直线 l_2 的垂线,垂足为 B,求矩形 $PACB$ 周长的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知 $a+2b+3c=4$.

(1)若 a,b,c 均为正数,证明:$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 9$.

(2)若 a,b,c 均为实数,求 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|$ 的最小值.

2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|-1<x<3\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<3\}$.

2. B 【解析】本题考查平面向量的垂直与充分、必要条件的判断,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$,可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(m+3)^2-5(2m+1)=0$,解得 $m=2$. 所以"$|m|=2$"是"$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$"的必要不充分条件.

3. A 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略),当直线 $z=x-y$ 经过点 $(-3,3)$ 时,z 取得最小值,且最小值为 -6.

4. B 【解析】本题考查正切的和差公式与同角的三角函数的关系,考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan\alpha=\tan(\alpha-\beta+\beta)=\frac{2+4}{1-2\times4}=-\frac{6}{7}$,所以 $\frac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{7\tan\alpha-1}{7\tan\alpha+1}=\frac{-6-1}{-6+1}=\frac{7}{5}$.

5. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $y=\frac{x^4-x^3}{x-1}=x^3(x\neq1)$,所以 $y'=3x^2(x\neq1)$,由 $3m^2=3$,得 $m=-1$ 或 $m=1$(舍去).

所以该切线的方程为 $y=3x+2$,所以该切线在 x 轴上的截距为 $-\frac{2}{3}$.

6. C 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(x-5)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-5,0)$ 对称,要确保 $f(x)$ 的零点唯一,数形结合可得 $m\leqslant-5$.

7. B 【解析】本题考查指数与对数的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\begin{pmatrix}\lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8^{\frac{2}{3}}\\ 2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\lg 2 & 2\lg 5\\ \lg 5 & \lg 2^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 2+\lg 5\\ 4\lg 5+4\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}.$$

8. C 【解析】本题考查平面向量的基本定理与数量积,考查直观想象与数学运算的核心素养.

(方法一)由题意可知,$\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 相似,所以 $\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC}|}=2$,所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\times3^2=10$,所以 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

(方法二)$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AD}=-|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=-9+15=6$.

9. C 【解析】本题考查三角函数图象的识别,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

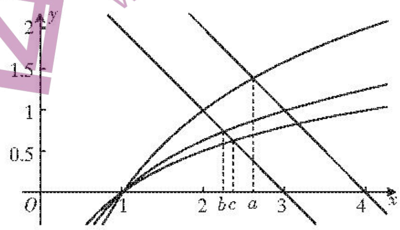
$f(\frac{\pi}{2})=-2\sin\varphi$,$g(\frac{\pi}{2})=2\sin\varphi=-f(\frac{\pi}{2})$,故选 C.

10. D 【解析】本题考查数列的实际应用,考查数学建模的核心素养与应用意识.

设该公司在 2022 年,2023 年,…,2031 年的销售额(单位:万元)分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$. 依题意可得 $a_{n+1}=1.2a_n-2(n=1,2,\cdots,9)$,则 $a_{n+1}-10=1.2(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$,所以数列$\{a_n-10\}$是首项为 90,公比为 1.2 的等比数列,则 $a_n-10=90\times1.2^{n-1}$,即 $a_n=90\times1.2^{n-1}+10$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\dfrac{90\times(1-1.2^{10})}{1-1.2}\approx100+450\times(6.19-1)=2435.5$,故从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为 2435.5 万元.

11. A 【**解析**】**本题考查基本初等函数与比较大小,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.**

由 $a+\log_2a=4,b+\log_3b=c+\log_4c=3$,得 $\log_2a=4-a,\log_3b=3-b,\log_4c=3-c$,作出函数 $y=\log_2x,y=4-x,y=3-x,y=\log_3x,y=\log_4x$ 的大致图象,如图所示,由图可知 $a>c>b$.



12. D 【**解析**】**本题考查倍角公式的灵活应用,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

$\sin\dfrac{\pi}{5}=\sin\dfrac{4\pi}{5}=2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=4\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}(2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1)$,因为 $\sin\dfrac{\pi}{5}>0$,所以 $1=4\cos\dfrac{\pi}{5}(2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1)$,所以 $8\cos^3\dfrac{\pi}{5}-4\cos\dfrac{\pi}{5}-1=0$,所以 $a=8,b=4,a+b=12$.

13. 若 a,b 都小于 1,则 $a+b\neq2$ 【**解析**】**本题考查命题的逆否命题,考查逻辑推理的核心素养.**

原命题的逆否命题要将原命题的条件和结论都否定后再将所得条件与结论对换,"a,b 不都小于 1"的否定为"a,b 都小于 1".

14. 32 【**解析**】**本题考查等差、等比数列,考查数学运算的核心素养.**

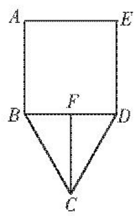
依题意可得$\{a_n\}$的前 8 项为 0,2,4,8,12,18,24,32.

15. $\dfrac{\pi}{12}$(本题答案不唯一,只要写出$-\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}$这 3 个值的任意 1 个即可) 【**解析**】**本题考查三角函数图象的变换与对称性,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

依题意可得 $f(x)=\sin[4(x+\dfrac{\pi}{24})]=\sin(4x+\dfrac{\pi}{6})$,则$\begin{cases}4m+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z}),\\ m+\dfrac{11\pi}{12}=k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

因为 $-\pi<m<2\pi$,所以 $m=-\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}$.

16. $\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 【**解析**】**本题考查导数的实际应用,考查数学建模、直观想象、数学运算的核心素养.**



过点 C 作 $CF\perp BD$,垂足为 F. 设 $AB=x(x>0)$,则 $BD=AE=DE=x$,因为 $BC=CD$,所以 $3AB+2BC=12$,则 $BC=6-\dfrac{3}{2}x$. 由 $BC>0,BC+CD>BD$,得 $0<x<3$. 在 $\triangle BCF$ 中,$CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{(6-\dfrac{3}{2}x)^2-(\dfrac{1}{2}x)^2}=$

$\sqrt{2x^2-18x+36}$. 记$\triangle BCD$的面积为S,则$S=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4-9x^3+18x^2}$. 设函数$f(x)=x^4-9x^3+18x^2$,则$f'(x)=4x^3-27x^2+36x=x(4x^2-27x+36)$,令$f'(x)=0$,得$x=0$或$x=\frac{27\pm3\sqrt{17}}{8}$. 当$0<x<\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$时,$f'(x)>0$;当$\frac{27-3\sqrt{17}}{8}<x<3$时,$f'(x)<0$. 故当$x=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$时,$f(x)$取得最大值,则$S$取得最大值,此时$AB=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$.

17. 解:(1)依题意可得$\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \frac{11+q}{60}=\frac{4}{15},\end{cases}$ ………… 2分

解得$\begin{cases}p=13,\\ q=5.\end{cases}$ ………… 4分

(2)将每个数据都减去28.50后所得新数据的平均数为$\frac{1}{60}[0.01\times13+0.02\times6+0\times4+(-0.02)\times11+(-0.01)\times13+0.04\times1+0.03\times7+(-0.03)\times5]=0$, ………… 6分

所以$\bar{x}=0+28.50=28.50$, ………… 7分

所以$\bar{x}-s=28.48$,$\bar{x}+s=28.52$, ………… 9分

所以这60个零件内径尺寸在$[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$内的个数为$60-1-7-5=47$. ………… 11分

因为$\frac{47}{60}<\frac{48}{60}=0.8$,所以这次抽检的零件不合格. ………… 12分

18. 解:(1)由正弦定理及$a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$,得$\sin A\sin(A-B)=(\sin C-\sin B)\sin A$.
………… 1分

因为$\sin A>0$,所以$\sin(A-B)=\sin C-\sin B$, ………… 2分

所以$\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$, ………… 3分

所以$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$,

即$2\sin B\cos A=\sin B$, ………… 4分

因为$\sin B>0$,所以$\cos A=\frac{1}{2}$. ………… 5分

又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6分

(2)$S=\frac{1}{2}AD\cdot[CD\sin\angle ADC+BD\sin(\pi-\angle ADC)]=\frac{a}{2}\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$,

因为$S=3\sqrt{3}$,所以$a=4$. ………… 8分

又$S=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A$,所以$bc=12$. ………… 9分

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

则$a^2=(b+c)^2-3bc$, ………… 10分

所以$b+c=\sqrt{a^2+3bc}=2\sqrt{13}$. ………… 11分

所以$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{13}$. ………… 12分

19.(1)证明：取 AD 的中点 F，连接 EF,PF,BD. 因为 $\triangle PAD$ 是正三角形，所以 $PF\perp AD$. ………………………… 1分

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 2分

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp AC$. ………………………… 3分

因为 E 是 AB 的中点，所以 $EF/\!/BD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，从而 $EF\perp AC$. ………………………… 4分

因为 $PF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 PEF. ………………………… 5分

因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $AC\perp PE$. ………………………… 6分

(2)解：连接 BF，因为 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\triangle ABD$ 是正三角形，所以 $BF\perp AD$. ………… 7分

以 F 为坐标原点，FA,FB,FP 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

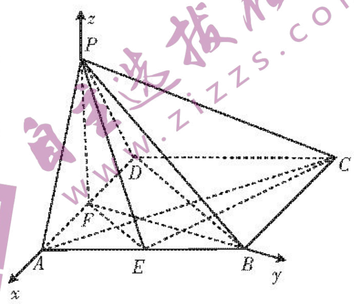
令 $AB=2$，则 $C(-2,\sqrt{3},0)$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

则 $\overrightarrow{CE}=(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(2,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………………………… 8分

设平面 CEP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{5}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}=2x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}z_0=0,\end{cases}$

令 $x_0=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},5,3)$. ………………………… 9分

由题可知，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 ACE 的一个法向量. ………………………… 10分



$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{37}}=\frac{3\sqrt{37}}{37}$，………………… 11分

由图可知，二面角 $A-CE-P$ 为锐角，则二面角 $A-CE-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{37}}{37}$. ………………… 12分

20.(1)解：设椭圆方程为 $px^2+qy^2=1$，………………………… 1分

则 $\begin{cases}q=1,\\ \frac{64}{25}p+\frac{9}{25}q=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\frac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$ ………………………… 3分

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 4分

注：若直接设 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得到 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，扣1分.

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，$A(m,0)$，$B(n,0)$，

直线 PD：$y+\frac{3}{5}=\frac{y_0+\frac{3}{5}}{x_0+\frac{8}{5}}(x+\frac{8}{5})$，令 $y=0$，得 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$. ……………………………… 5分

直线 PC：$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$. 令 $y=0$，得 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$. ……………………………………… 6分

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=(n-\frac{x_0}{y_0+1})(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}})=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$. ……

………………………………………………………………………………………………… 8分

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$，

令 $5m+8=-3n$，$3m=-3n$，得 $n=4$，$m=-4$，………………………………………… 10分

则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=-12$.

故存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$，使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值，且定值为 -12. ………………… 12分

21.(1)解：$f'(x)=\frac{2a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2ax-1}{x^2}$. ……………………………………… 1分

设函数 $g(x)=-x^2+2ax-1$，$\Delta=4a^2-4$.

当 $\Delta\leqslant 0$，即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，此时 $g(x)\leqslant 0$，则 $f'(x)\leqslant 0$，……………………………… 2分

则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$. ……………………………………… 3分

当 $\Delta>0$，即 $a>1$ 或 $a<-1$ 时，若 $a<-1$，$g(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，由韦达定理得 $x_1+x_2=2a<0$，$x_1x_2=1>0$，则 x_1,x_2 均小于零，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

则 $f(x)\leqslant f(1)=0$；…………………………………………………………………… 4分

若 $a>1$，则 $x_1+x_2=2a>2$，$x_1x_2=1>0$，则可设 $0<x_1<1<x_2$，当 $x\in(1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)>f(1)=0$，不符合题意. …………………………………………… 5分

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 6分

(2)证明：当 $a=1$ 时，$\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\leqslant 0$，即 $\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，……………………………………………………………………………………… 7分

令 $x=n(n+1)$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$，则 $x>1$，则 $\ln[n(n+1)]<\frac{1}{2}[n(n+1)-\frac{1}{n(n+1)}]$，…… 8分

记 $a_n=\ln(n(n+1))$，$b_n=n(n+1)$，$c_n=\frac{1}{n(n+1)}$，则 $a_n<\frac{1}{2}(b_n-c_n)$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<\frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，……… 9分

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}i(i+1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}[(i+2)(i+1)i-(i+1)i(i-1)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$，………… 10分

则可以得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<\frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n}{n+1}]$，……………………………… 11分

故 $3n+6(n+1)\sum_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<n(n+1)^2(n+2)$. …………12 分

22. 解:(1)设点 C 的直角坐标为(x,y),则 $x=4\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}=-4$,$y=4\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-4$,

所以点 C 的直角坐标为$(-4,-4)$. …………2 分

由 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=11$,得 $x^2+y^2-2x-4y=11$, …………4 分

所以圆 M 的直角坐标方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=16$. …………5 分

(2)设点 P 的坐标为$(1+4\cos\alpha,2+4\sin\alpha)$. …………7 分

矩形 $PACB$ 的周长为 $2(1+4\cos\alpha+4+2+4\sin\alpha+4)=22+8\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$, …………9 分

当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$ 时,矩形 $PACB$ 的周长取得最大值,且最大值为 $22+8\sqrt{2}$. …………10 分

23. (1)证明:$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})(a+2b+3c)$, …………1 分

因为 a,b,c 均为正数,所以由柯西不等式可得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant\frac{1}{4}\times(1+2+3)^2=9$, …………3 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时,等号成立, …………4 分

故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 9$. …………5 分

(2)解:因为 $a+2b+3c=4$,所以 $\frac{1}{2}a+b=\frac{4-3c}{2}$, …………6 分

所以 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$. 设函数 $f(c)=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$,

则 $f(c)=|\frac{3}{2}c-2|+|c|=\begin{cases}2-\frac{5}{2}c,c\leqslant 0,\\2-\frac{1}{2}c,0<c<\frac{4}{3},\\\frac{5}{2}c-2,c\geqslant\frac{4}{3}.\end{cases}$ …………8 分

当 $c\leqslant 0$ 时,$f(c)\geqslant 2$;当 $0<c<\frac{4}{3}$ 时,$\frac{4}{3}<f(c)<2$;当 $c\geqslant\frac{4}{3}$ 时,$f(c)\geqslant\frac{4}{3}$. …………9 分

所以 $f(c)_{\min}=\frac{4}{3}$,故 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$. …………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。