

2022--2023 学年第一学期高三期末学情调研测试

数 学 答 案

1. C 2. D 3. B 4. C 5. B 6. B 7. A 8. B

9. BCD 10. BD 11. ACD 12. AD

13. 40 14. $\frac{1}{2}$ 15. 8 或 $-\frac{40}{27}$ 16. $\frac{4}{3}$

$$17. (1) \frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{\frac{3a_n-1}{a_n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1} = \frac{a_n+1}{2a_n-2} - \frac{1}{a_n-1} = \frac{a_n-1}{2(a_n-1)} = \frac{1}{2} \text{ 为常数}$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n-1} \right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.....5 分

$$(2) \because \frac{1}{a_1-1} = \frac{1}{2} \therefore \text{由 (1) 得 } \frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\therefore a_n - 1 = \frac{2}{n}$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{n+1} \times \frac{2}{n} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$18. (1) \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } BC = 2, \angle ABC = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 3\sqrt{3}, \text{ 可得 } AB = 6, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\ &= 36 + 4 - 12 \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{7} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{设 } \angle ACD = \alpha, \text{ 则 } \angle DAC = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

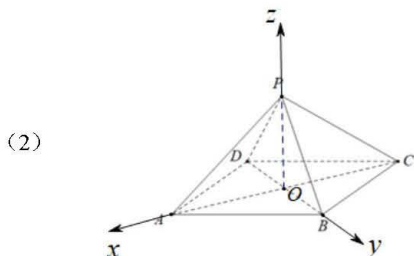
$$\text{在 } Rt\triangle ACD \text{ 中, } AD = 5, \text{ 易知: } AC = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, 即 $\frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{AC}{\sin \frac{\pi}{3}}$,

即 $AC = \frac{2\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha}$ 10 分

$\therefore \frac{5}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha}$, 可得 $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 即 $\tan \angle ACD = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ 12 分

19. (1) 证明: 设 AC 交 BD 于 O , 底面 $ABCD$ 是菱形, 则 $BD \perp AC$, O 是 BD 中点,
又 $PB = PD$, 所以 $BD \perp PO$, 又 $PO \cap AC = O$, $PO, AC \subset$ 平面 PAC ,
则 $BD \perp$ 平面 PAC ,3'
又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 则平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$ 5'



解: $PA = AD = \sqrt{2}PD$, $\angle BAD = 60^\circ$, 不妨设 $PA = AD = 2$, 则

$PD = PB = \sqrt{2}$, $BD = 2$, $AO = \sqrt{3}$, 又 $BD \perp PO$, 则 $PO = 1$, 所以 $PA^2 = PO^2 + AO^2$,
所以 $PO \perp AO$,7'

以 O 为原点, 分别以 OA, OB, OP 为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-\sqrt{3}, 0, 0), D(0, -1, 0), P(0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{PB} = (0, 1, -1), \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{PD} = (0, -1, -1)$

设平面 PBC 的一法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x - y = 0 \\ \overrightarrow{PB} \cdot \vec{n} = y - z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = -1, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (-1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

同理, 求得平面 PAD 的一法向量 $\vec{n}_2 = (-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,10'

设平面 PBC 和平面 PAD 所成锐角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right| = \frac{1}{7},$$

所以, 平面 PBC 和平面 PAD 所成锐角的余弦值为 $\frac{1}{7}$ 12'

20. (1)由题意知, 每位学生计划不选择校本课程二的概率为 $\frac{1}{4}$, 选择校本课程二的概率为 $\frac{3}{4}$,

则 X 的可能取值为 3, 4, 5, 6,

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$P(X=4) = C_3^1 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$P(X=5) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64},$$

$$P(X=6) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \quad \dots\dots\dots 4'$$

所以 X 的分布列如下表所示:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$\text{所以 } E(X) = 3 \times \frac{1}{64} + 4 \times \frac{9}{64} + 5 \times \frac{27}{64} + 6 \times \frac{27}{64} = \frac{21}{4}. \quad \dots\dots\dots 6'$$

(2)因为这 n 人的合计得分为 $n+1$ 分, 则其中只有 1 人计划选择校本课程二,

$$\text{所以 } P_n = C_n^1 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3n}{4^n} \quad \dots\dots\dots 8'$$

$$\text{设 } S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{3}{4^1} + \frac{6}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \dots + \frac{3n}{4^n}$$

$$\text{则 } \frac{1}{4} S_n = \frac{1}{4} (P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \frac{3}{4^2} + \frac{6}{4^3} + \frac{9}{4^4} + \dots + \frac{3n}{4^{n+1}}$$

$$\text{由两式相减得 } \frac{3}{4} S_n = \frac{3}{4^1} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{3}{4^n} - \frac{3n}{4^{n+1}}$$

$$\text{即, } \frac{3}{4} S_n = 3 \times \frac{1 \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{3n}{4^{n+1}} = 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{3n}{4^{n+1}} = 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}}$$

$$\text{所以 } P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}}\right) \quad \dots\dots\dots 12'$$

21. (1)由题意知,
$$\begin{cases} b=1 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}, \text{解之得} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases},$$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 3'

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} l_{AB}: y=k_1(x-1) \\ E: \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得, $(4k_1^2+1)x^2-8k_1^2x+(4k_1^2-4)=0$

因为 $T(1,0)$ 在椭圆内部, 则必有 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{4k_1^2+1} \\ x_1x_2=\frac{4k_1^2-4}{4k_1^2+1} \end{cases},$

故, $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k_1^2}{4k_1^2+1}, y_M=k_1(x_M-1)=\frac{-k_1}{4k_1^2+1}$ 5'

设直线 $l_{MN}: Ax+By+C=0 (A^2+B^2 \neq 0)$,

将 $M\left(\frac{4k_1^2}{4k_1^2+1}, \frac{-k_1}{4k_1^2+1}\right)$ 代入 l_{MN} , 得 $A \cdot \frac{4k_1^2}{4k_1^2+1} - Bk_1 + C(4k_1^2+1) = 0$,

即 $(4A+4C)k_1^2 - Bk_1 + C = 0$ 同理, $(4A+4C)k_2^2 - Bk_2 + C = 0$... 7'

显然 k_1, k_2 是方程 $(4A+4C)k^2 - Bk + C = 0$ 的两根,

则 $\begin{cases} k_1+k_2=\frac{B}{4A+4C} \\ k_1k_2=\frac{C}{4A+4C} \end{cases}$ 9'

因为 $(k_1+1)(k_2+1)=2$, 则 $k_1k_2+k_1+k_2=1$, 即 $\frac{C}{4A+4C} + \frac{B}{4A+4C} = 1$,

得: $C = -\frac{4}{3}A + \frac{1}{3}B$, 11'

故直线 $l_{MN}: Ax+By+\left(-\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}B\right)=0$,

即 $l_{MN}: A\left(x-\frac{4}{3}\right)+B\left(y+\frac{1}{3}\right)=0 (A^2+B^2 \neq 0)$,

故 直线 MN 经过定点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 12'

22. (1)解: $f'(x) = \frac{1-x}{2e^x}$,

可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

则 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2e}$, 2'

$g'(x) = \frac{x-1}{x}, x > 0$, 可得 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增,

则 $g(x)_{\min} = g(1) = 1+m$, 4'

有 $\frac{1}{2e} = 1+m$, $m = \frac{1}{2e} - 1$, 所以, m 的值为 $\frac{1}{2e} - 1$ 5'

(2) 证明: 若 $F(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 不妨设 $0 < x_2 < x_1$,

$F(x) = \frac{x}{2e^x} + \ln \frac{x}{e^x} - m$, 设 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = t_1, \frac{x_2}{e^{x_2}} = t_2$,

由 $F(x_1) = F(x_2) = 0$, 得 $\begin{cases} \frac{1}{2}t_1 + \ln t_1 - m = 0 \\ \frac{1}{2}t_2 + \ln t_2 - m = 0 \end{cases}$,

因为函数 $y = \frac{1}{2}t + \ln t - m$ 是增函数, 所以 $t_1 = t_2$,

则 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$, 8'

设 $\frac{x_1}{x_2} = t (t > 1)$, 则 $x_2 = \frac{\ln t}{t-1}, x_1 = \frac{t \ln t}{t-1}$,

欲证: $\ln x_1 + \ln x_2 < 0$, 即证: $x_1 x_2 < 1$,

即证: $t \left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 < 1$, 只需证: $\ln t < \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} (t > 1)$ (*)

设 $h(x) = \ln x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1$,

$h'(x) = \frac{-(x-1)^2}{2x^2}$, 在 $(1, +\infty)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减, 所以 $h(x) < h(1) = 0$,

所以, $\ln x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right) < 0 (x > 1)$, 令 $x = \sqrt{t}$ 即得 (*) 成立,

从而, 命题得证. 12'

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线